RAPPORT DE NEUMANN (D1, D2, J1, N9)
(05 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $x = (x_t)_{t=1,...,T}$ une **série temporelle** (réelle scalaire en **temps** discret fini).

On pose :

$$(1)\qquad \begin{aligned} D_T^2 &= (T-1)^{-1} \,.\, \Sigma_{t=1}^{T-1} (x_{t+1} - x_t)^2 && \text{(\textbf{moyenne} des carrés des différences),} \\ S_T^2 &= T^{-1} \,.\, \Sigma_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x}_T)^2 && \text{(\textbf{variance empirique} de x).} \end{aligned}$$

On appelle alors **rapport de J. von NEUMANN** la **statistique** :

$$(2)\qquad R_T = D_T^2 / S_T^2.$$

(ii) Si $X = (X_t)_{t \in T}$, le **processus** générateur de x, est iid selon $X_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (**loi normale**) (cf **processus générateur de données**, **processus purement aléatoire**), on montre que $E\, D_T^2 = 2\, \sigma^2$.

R_T est une **statistique de test** adaptée à l'hypothèse d'**indépendance** (ie pour H_0 : X est un processus indépendant). En effet, sous H_0 , on a :

$$(3)\qquad \mathcal{L}(A_T / B_T) \rightarrow_{T \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1) \text{ (\textbf{loi normale})},$$

avec $A_T = R_T - 2$ et $B_T = 2\,(T^2 - 1)^{-1/2} \,.\, (T - 2)^{1/2}$.

Ceci permet de définir des régions critiques asymptotiques (cf **région de confiance asymptotique**).

(iii) Le rapport de NEUMANN intervient dans l'étude des **tests d'autocorrélation** des **perturbations** (notamment en relation avec le **test de DURBIN-WATSON** pour des alternatives d'autocorrélation).

En effet, si X est un **processus autocorrélé au premier ordre**, ie si :

$$(4)\qquad X_t = \rho\, X_{t-1} + u_t\,, \qquad \forall\, t \in \mathbf{Z},$$

où $u = (u_t)_{t \in \mathbf{Z}}$ est un **bruit blanc** gaussien indépendant de X et où $T = \mathbf{Z}$, alors :

$$(5)\qquad R_T = 2\,(1 - \tilde{\rho}) + o_p\,(T),$$

où $\tilde{\rho}$ désigne l'**estimateur du maximum de vraisemblance** de ρ dans (4). On peut donc fonder sur R_T (ou sur $\tilde{\rho}$) un test de l'hypothèse $H_0 : \rho = 0$ (absence d'autocorrélation d'ordre 1) contre une alternative $H_a^+ : \rho > 0$ (existence d'une autocorrélation positive d'ordre 1) ou contre une alternative $H_a^- : \rho > 0$ (existence d'une autocorrélation négative d'ordre 1).