RAPPORT DE DENSITÉS MONOTONE (C5, I)
(11 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) un **modèle paramétrique** tq $\Theta \subset$ **R**. On suppose ce **modèle homogène** et que la famille $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ des **lp** est dominée par une **mesure positive** σ-finie μ (cf **famille de lois dominée**, **mesure σ-finie**), ie $P_\theta^X << \mu$, $\forall \theta \in \Theta$. On note alors $dP_\theta^X / d\mu = f(., \theta)$ la **densité** de P_θ^X pr à μ et l'on suppose que $f > 0$ (μ-p.p.), $\forall \theta \in \Theta$.

On dit que $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ est une **famille à rapport de densités monotone**, ou une **famille à rapport de vraisemblances monotone**, en X (ou pr à X) ssi il existe une **statistique** réelle scalaire u : $\mathscr{X} \mapsto$ **R** et une fonction numérique positive ψ : **R** $\mapsto$ **R**$_+$ strictement monotone tq le **rapport des vraisemblances** (ou **rapport des densités**) $(dP_{\theta'}^X / d\mu) / (dP_{\theta''}^X / d\mu) = dP_{\theta'}^X \mu$-p.p. puisse s'écrire sous la forme :

(1) $\quad dP_{\theta'}^X / dP_{\theta''}^X = f(., \theta') / f(., \theta'') = \psi \circ u, \qquad \forall (\theta', \theta'') \in \Theta^2_>$,

ie ssi $f(x, \theta') / f(x, \theta'') = \psi(u(x))$, où l'on note $\Theta^2_> = \{(\theta', \theta''') \in \Theta : \theta' > \theta''\}$.

(ii) En pratique, ψ est généralement strictement croissante. Ainsi, la **famille exponentielle**, dont les densités sont de la forme :

(2) $\quad f(x, \theta) = c(\theta) . e^{a(\theta) t(x)}$,

est à **rapport de densités strictement monotone** ssi a est strictement monotone.

La notion est notamment utilisée en **théorie des tests** (cf **test du rapport des vraisemblances**).