RÉGION CRITIQUE (D'UN TEST) (I1)
(20 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}^X$) un **modèle statistique** image. On considère un **problème de test** défini par une **partition** {$\mathcal{P}_0^X$, $\mathcal{P}_1^X$} de $\mathcal{P}^X$, avec $\mathcal{P}_0^X \neq \emptyset$, $\mathcal{P}_1^X \neq \emptyset$, et $\mathcal{P}_0^X \cap \mathcal{P}_1^X = \emptyset$ (**familles de lois** « séparées »), dans lequel on cherche à tester l'**hypothèse de base** $H_0 : P^X \in \mathcal{P}_0^X$ contre l'**alternative** $H_1 : P^X \in \mathcal{P}_1^X$ au vu de l'**échantillon** X.

Un **test pur** (statique) consiste à choisir une **partie mesurable** $w \in \mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$ tq, si $x = X(\omega) \in \mathcal{X}$ désigne le résultat observé de l'**expérience aléatoire** décrite par le modèle précédent :

(a) si $x \in w$, on rejette l'hypothèse H_0 ;

(b) si $x \in w^c = \mathcal{X} \setminus w$, on accepte l'hypothèse H_0 .

On appelle w la **région critique**, ou **région de rejet**, de H_0 et w^c la **région d'acceptation** de H_0 .

Le problème de test consiste donc à « bien » choisir w, ie à définir un **critère d'optimalité** sur la famille des régions critiques tq w.

(ii) D'un point de vue terminologique, w est parfois aussi appelée **test**. En effet, en termes de **théorie de la décision**, l'ensemble D des décisions est ici réduit à deux éléments, notés resp d_0 et d_1 (ou 0 et 1). Si $x \in w$, on décide d_1 (rejet de H_0, ie acceptation de H_1), et si $x \in w^c$, on décide d_0 (acceptation de H_0 , ie rejet de H_1).

Si l'on note $\delta : \mathcal{X} \mapsto D$ un test pur, la région critique associée à δ est donc $w = \delta^{-1}(d_1)$: c'est la partie de $\mathcal{X}$ constituée des observations $x = X(\omega)$ conduisant à un refus de l'hypothèse $H_0 : P^X \in \mathcal{P}_0^X$. Comme card D = 2, la donnée du test δ équivaut à celle de $w \in B$, ce qui justifie l'appellation de test (pur) donnée à w.

(iii) La présentation précédente est sous forme non paramétrée. Sous forme paramétrée (et, notamment, **paramétrique**), on note $\mathcal{P}^X = (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$, $\Pi_\Theta = \{\Theta_0 , \Theta_1\}$, $\Theta_0 \neq \emptyset$, $\Theta_1 = \Theta_0^c$, $H_0 : \theta \in \Theta_0$ et $H_1 : \theta \in \Theta_1$.

Soit $\mathcal{W}$ = {w} une famille de régions critiques associées à un **risque de première espèce** $\alpha \in [0, 1]$. On dit que $\tilde{w} \in \mathcal{W}$ est la **meilleure région critique** ssi le **risque de seconde espèce** β associé à $\tilde{w}$ est minimum (cf **puissance d'un test**).

(iv) Soit H_1 une **alternative** à l'hypothèse de base H_0 . Si la **puissance du test** est supérieure au seuil α du test, on dit que la région critique w associée au test de H_0 contre H_1 est une **région critique sans biais**.

(v) A la notion de **région d'acceptation** (d'une hypothèse, ou d'un test) correspond celle de **région de confiance** pour l'**estimation** d'un paramètre.

En pratique, un test d'hypothèse est souvent effectué, non pas directement à partir de l'observation X elle-même, mais à partir d'une **statistique** S = s (X), appelée **statistique de test**. C'est donc à partir de S que les régions critiques sont définies (cf aussi **queue d'une loi**).

(vi) Un problème de test est parfois symbolisé avec une partition de $\mathscr{P}^X$ notée $\{\mathscr{P}_b^X, \mathscr{P}_a^X\}$, l'hypothèse de base étant notée $H_b : P^X \in \mathscr{P}_b^X$ et l'alternative étant alors notée $H_a : P^X \in \mathscr{P}_a^X$. L'observation de $x \in w$ conduit à décider d_a (rejet de H_b , ie acceptation de H_a), tandis que celle de $x \in w^c$ conduit à décider d_b (acceptation de H_b , ie rejet de H_a).