

RÉGION DE CONFIANCE MINIMALE (H2)

(01 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Une **région de confiance minimale** n'est autre qu'une **région de confiance la plus précise** (uniformément), ie une région extrême pour le préordre $\succ$ défini sur l'ensemble des régions de confiance de niveau donné pour un **paramètre** à estimer.

(ii) La notion se rencontre aussi dans le contexte de la méthode du **maximum de vraisemblance généralisé**. Si $\Theta \subset \mathbf{R}^Q$ et si $\theta_N \sim (\varphi)$ désigne l'estimateur du mv généralisé, sa **loi asymptotique** est gaussienne, ie $\mathcal{N}_Q(0, (\Sigma_{\theta^*}(\varphi))^{-1})$, où θ^* désigne la **vraie valeur** (inconnue) du paramètre $\theta \in \Theta$ (cf **loi normale**).

Une **région de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$** pour θ est de la forme :

$$(1) \quad S_N(X, \alpha, \varphi) = \{\theta_N \sim (\varphi) + N^{-1/2} R_\alpha(X, \varphi)\},$$

avec :

$$(2) \quad R_\alpha(X, \varphi) = \{\theta \in \mathbf{R}^Q : \theta' (\Sigma_N(\varphi))^{-1} \theta \leq q_\alpha\},$$

où $\Sigma_N(\varphi) = \Sigma \theta_N \sim (\varphi)$, et où q_α désigne le **quantile** d'ordre α de la **loi du chi-deux** χ_Q^2 à **Q degrés de liberté**. Ce quantile est déterminé selon :

$$(3) \quad \chi_Q^2([K_Q^2 \leq q_\alpha]) = \alpha, \quad \text{où } K_Q^2 \sim \chi_Q^2.$$

Par suite, en notant :

$$(4) \quad S_N(X, \alpha) = \{\theta \in \mathbf{R}^Q : \theta' A_N(X) \theta \leq q_\alpha\}$$

la région de confiance associée à l'**estimateur du mv** θ_N de θ , et $A_N(X)$ la (Q,Q)-**matrice** aléatoire (**matrice symétrique**) de terme général :

$$(5) \quad a_{qr}(X) = N^{-1} \cdot \sum_{n=1}^N \{(\partial / \partial \theta_q) \text{Log } f(X_n, \theta)\} \cdot \{(\partial / \partial \theta_r) \text{Log } f(X_n, \theta)\},$$

on montre que :

$$(6) \quad N \rightarrow +\infty \Rightarrow S_N(X, \alpha) \subset S_N(X, \alpha, \varphi), \quad P_{\theta^*}\text{-p.s.}, \forall \theta \in \Theta,$$

quelle que soit φ vérifiant les hypothèses initiales de la méthode.

On appelle $S_N(X, \alpha)$ la **région de confiance (asymptotique) minimale de niveau $1 - \alpha$** pour le paramètre θ , construite sur la classe des estimateurs asymptotiquement sans biais de θ^* . La notion s'entend donc au sens de l'inclusion ensembliste.

On dit aussi que $S_N(X, \alpha)$ est la **région de confiance (asymptotique) la plus petite**, ou **région de confiance (asymptotique) la plus fine** (au sens de l'inclusion ensembliste).