RÈGLE DE BAYES (G3)
(14 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) En **théorie de la décision** (cf **décision statistique**), l'approche de l'**Ecole bayésienne** considère un **modèle image** ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) et un ensemble Δ (resp Δ_M) de **règles de décision pures** (resp de **règles de décision mixtes**). Elle suppose alors que Θ est muni d'une **tribu de parties** $\mathcal{B}_\Theta$ sur laquelle est définie une **loi a priori** Π. Chaque **loi** P_θ^X est considérée comme une **probabilité de transition** et l'on note $\delta \mapsto R_\Pi(\delta)$ (resp $m \mapsto R_\Pi(m)$) le **risque de BAYES** fondé sur des règles pures (resp sur des règles mixtes).

On appelle alors **règle de décision de T. BAYES**, ou **règle de décision bayésienne**, ou encore **règle de T. BAYES**, ou **règle bayésienne**, **pure** (resp **mixte**) toute règle de décision $\delta^{\sim} \in \Delta$ (resp $m^{\sim} \in \Delta_M$) associée à Π et tq le risque de BAYES $\delta \mapsto R_\Pi(\delta)$ (resp $m \mapsto R_\Pi(m)$) soit minimum, ie :

$$R_\Pi(\delta^{\sim}) \leq R_\Pi(\delta), \quad \forall\, \delta \in \Delta \tag{1}$$
$$(\text{resp } R_\Pi(m^{\sim}) \leq R_\Pi(m), \quad \forall\, m \in \Delta_M).$$

Ainsi, dans le cas (général) mixte, on a :

$$\int R(m^{\sim}, \theta)\, d\Pi(\theta) \leq \int R(m, \theta)\, d\Pi(\theta), \quad \forall\, m \in \Delta_M, \tag{2}$$

où $R(m, \theta)$ est la **fonction de risque** associée à la décision m lorsque le « vrai » état de la **Nature** est θ.

Une règle de BAYES dépend, en général, de Π : c'est pourquoi on la note $m_\Pi^{\sim}$ (ou $\delta_\Pi^{\sim}$ dans le cas pur).

Une décision de BAYES mixte est aussi appelée **stratégie de T. BAYES**, ou **stratégie bayésienne**.

(ii) Dans un **problème statistique**, l'adoption d'une règle de BAYES constitue un **principe de décision bayésien**, parfois (improprement) appelé **méthode de la probabilité inverse** (cf **théorème de BAYES**). Ce principe est la base des méthodes bayésiennes (**théorie bayésienne** ou ensemble des méthodes mises en oeuvre par l'**école bayésienne**).

(iii) On appelle :

(a) **règle de T. BAYES epsilon-approchée**, ou **règle de T. BAYES ε-approchée**, ou encore **règle epsilon-BAYES**, ou **règle ε-BAYES**, **pure** toute règle $\delta_\varepsilon^{\sim} \in \Delta$ tq il existe un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant l'inégalité :

$$R_\Pi(\delta_\varepsilon^{\sim}) \leq \inf_{\delta \in \Delta} R_\Pi(\delta) + \varepsilon \tag{3}$$

(b) **règle de T. BAYES epsilon-approchée** (ou **ε-approchée**), ou encore **règle epsilon-BAYES** (ou **ε-BAYES**), **mixte** toute règle $m_\varepsilon^{\sim} \in \Delta_M$ tq il existe un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant l'inégalité :

(4) $R_\Pi (m_\varepsilon^{\sim}) \leq \inf_{m \in \Delta M} R_\Pi (m) + \varepsilon$.

On dit alors que $\delta_\varepsilon^{\sim}$ (resp $m_\varepsilon^{\sim}$) est une **règle de T. BAYES étendue**, ou une **règle bayésienne étendue** ssi (3) (resp (4)) est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$.

On montre que, s'il existe une règle bayésienne (resp ε-bayésienne) mixte pour une loi a priori Π, alors il existe une règle bayésienne (resp ε-bayésienne) pure pour la même loi Π.

(iv) D'un point de vue terminologique, une règle de BAYES est appelée :

(a) **estimateur de BAYES**, ou **estimateur bayésien**, dans le cas d'un **problème d'estimation** ;

(b) (fonction de) **test de BAYES**, ou **test bayésien**, dans le cas d'un **problème de test**.