RÈGLE DE BAYES EMPIRIQUE (G3)
(08 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Au cours d'une **suite** d'**expériences aléatoires**, une **procédure de BAYES empirique** consiste à définir une **décision** qui tienne compte du fait que les **observations** successives apportent des « **informations** » sur le **paramètre**, donc peuvent conduire à modifier la probabilité a priori du **statisticien**.

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle statistique**, image d'un modèle de base $(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ par une **variable aléatoire** (**échantillon** observable) $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ (cf **observabilité**), $(D, \mathcal{B}_D)$ un **espace de décision** et $L : D \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+$ une **fonction de perte**. On suppose que Θ est doté d'une **tribu de parties** $\mathcal{B}_\Theta$ sur laquelle est définie une **probabilité a priori** Π, et l'on considère alors chaque loi P_θ^X comme une **probabilité de transition**, dominée par une **mesure positive** σ-finie μ définie sur $\mathcal{B}$ (cf **famille de lois dominée**).

Un **problème de décision bayésien** consiste usuellement à définir le **risque de BAYES** selon :

$$(1) \qquad R_\Pi(\delta) = \int R(\delta, \theta)\, d\Pi(\theta)$$

(où R (. , .) désigne la **fonction de risque** associée à L), puis à déterminer une fonction de **décision** (eg pure) $\tilde{\delta} : \mathcal{X} \mapsto D$ tq ce risque soit minimum pr à $\tilde{\delta}$.

Le problème précédente suppose que Π, non seulement existe (ie ait un sens), mais aussi qu'elle soit connue (ou donnée) a priori (eg **probabilité personnelle** du statisticien).

(ii) Lorsque Π, supposée exister, n'est pas connue (ou donnée), et que le problème bayésien précédent se pose de façon répétée (**problème de décision séquentielle**), on peut (H.E. ROBBINS) définir une règle de décision adaptée à cette situation.

Ainsi, soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle d'échantillonnage** asymptotique tq $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0^{\mathbf{N}}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0^{\otimes \mathbf{N}}$ et $P_\theta^X = (P_\theta^\xi)^{\otimes \mathbf{N}}$, $\forall\ N \in \mathbf{N}^*$, et soit $((X_n, T_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ une **suite iid** constituée de **couples aléatoires** (X_n, T_n) qui sont des **copies** du couple (**variable parente**) $(\xi, \tau) : \Omega \mapsto \mathcal{X}_0 \times \Theta$, où τ est la **va identité** de Θ (ie $\tau = id_\Theta$). On a noté P_θ^ξ la loi commune des X_n ($n \in N_N^*$) conditionnellement à $\tau = \theta$. La suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est inobservable mais, à l'instant N+1, on a observé $X_1, ..., X_{N+1}$.

On appelle alors **règle (de décision) de T. BAYES empirique**, ou parfois **règle (de décision) adaptative**, toute (suite de) fonction(s) de décision $\delta_N : \mathcal{X}_0^{N+1} \mapsto D$ définie selon :

(2) $(x_1, ..., x_{N+1}) \mapsto \delta_{N+1} = \delta_N (x_1, ..., x_{N+1})$.

La **fonction de perte** encourue lorsqu'on décide $d_{N+1} \in D$ alors que $\tau = T_{N+1}$ est notée $L (d_{N+1}, T_{N+1}) = L (\delta_N (x_1, ..., x_{N+1}), t_{N+1})$. On note $R_{\Pi,N} (\delta_N)$ la fonction de risque associée à la fonction de perte précédente, et définie comme une **fonction de risque** usuelle.

Par suite, on dit que $\delta^{\sim} = (\delta_N^{\sim})_{N \in \mathbf{N}^*}$ définit une **suite de règle de T. BAYES asymptotiquement optimale** pour Π ssi :

(3) $\lim_{N \to +\infty} R_{\Pi, N} (\delta_N^{\sim}) = \inf_{\delta \in \Delta} R_{\Pi} (\delta)$,

où R_{Π} désigne le **risque de BAYES** usuel (défini en (1)) et Δ l'ensemble des règles de décision pures $\delta : \mathscr{X} \mapsto D$ (ie $\Delta = D^{\mathscr{X}}$).

(iii) L'approche de BAYES empirique précédente définit un **problème de décision composée**. Il existe des méthodes permettant d'estimer Π à l'aide de cette approche (cf eg **théorème de ROBBINS**).

La démarche générale de ces méthodes consiste donc à utiliser les observations X_n pour estimer la loi a priori Π, ou même pour estimer directement la règle de BAYES elle-même.