RÈGLE DE DÉCISION (G3)
(05 / 11 / 2019,)

Notion fondamentale de la **Statistique** dans son approche « décisionnelle », une **règle de décision** est le concept qui permet la « prise de décision » en « univers aléatoire » : décision en présence d'incertain, action en milieu « risqué », etc.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un **modèle statistique** fondamental et $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$ son image par une **va** (en général, un **échantillon** observé, ou « observation ») $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ (cf **modèle image**). On note D un **ensemble** de décisions d possibles pour le « décideur » : homme de l'art, statisticien, joueur, acteur au sein d'un groupe, etc.

On appelle alors **règle de décision pure**, ou **règle de décision déterministe**, ou encore **règle de décision non aléatoire**, toute application :

(1) $\delta : \mathcal{X} \mapsto D$.

Cette dernière est aussi appelée **stratégie pure**, ou **stratégie déterministe**, ou encore **stratégie non aléatoire**.

On suppose généralement que D est muni d'une **tribu de parties** $\mathcal{B}_D$ et que δ est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_D)$-mesurable.

On note Δ l'ensemble $D^{\mathcal{X}} = \mathcal{A}(\mathcal{X}, D)$ des règles de décision pures.

D'un point de vue terminologique, on parle simplement de **(règle de) décision** pour désigner une « règle de décision pure ».

(ii) Plus généralement, on appelle **règle de décision mixte**, ou **règle de décision aléatoire**, ou encore **règle de décision « randomisée »**, toute **probabilité de transition** m définie sur $\mathcal{X} \times \mathcal{B}_D$.

Cette règle fait donc correspondre, à chaque $x \in \mathcal{X}$, une **probabilité** $m_x = m(x, .)$ définie sur $\mathcal{B}_D$: ayant observé x, on choisit une décision d selon un **schéma aléatoire** défini sur D par m_x .

On note Δ_M ou Δ_m l'ensemble des règles de décision mixtes m ainsi définies.

On appelle aussi m une **stratégie mixte**, ou **stratégie aléatoire**, ou encore **stratégie « randomisée »**.

Comme m est une probabilité de transition, elle vérifie les propriétés qui la définissent, ie :

(a) pour tout U $\in \mathscr{B}_D$, l'application x $\mapsto$ m (x, U), définie sur $\mathscr{X}$ et à valeurs dans [0, 1], est $\mathscr{B}$-mesurable ;

(b) pour tout x $\in \mathscr{X}$, l'application (**fonction d'ensembles**) U $\mapsto$ m (x, U) est une **mesure de probabilité** définie sur $\mathscr{B}_D$. On note généralement m_x ou m_x (.) cette probabilité pour tout x $\in \mathscr{X}$.

Une **règle de décision pure** est une règle aléatoire particulière pour laquelle $m_x = \varepsilon_{\delta (x)}$ (ou $\varepsilon_{\delta (x)}$ désigne ici la **loi de DIRAC** placée au « point » δ (x) $\in$ D).

L'utilité des règles mixtes est généralement d'ordre mathématique : l'ensemble Δ_M est une **partie convexe**, ce qui n'est pas le cas de Δ.

(iii) D'un point de vue terminologique, on parle souvent de **règle** au lieu de **décision**, et vice versa (cf problèle de **décision**).

(iv) Un **estimateur**, une **règle de classification**, une **règle minimax** ou un **test d'hypothèses**, etc, sont des exemples de règles de décision usuelles.