RÈGLE « MINIMAX » (G3)

Face à certaines situations aléatoire, une façon de prendre des décision optimales consiste à minimiser le plus grand des **risques** possibles : ce **comportement de prudence**, parfois érigé en **« principe de précaution »**, est naturel lorsque les conséquences résultant des décisions :

(a) comportent des coûts très élevés, ou des coûts non quantifiables mais qualitativement ou psychologiquement insupportables (cf **fonction de coût**) ;

(b) sont assorties d'une **utilité** très faible (eg négative) (cf **fonction d'utilité**) : traitements médicaux, tests cliniques, **catastrophes** (cyclones, séismes, expériences atomiques, etc).

(i) Soit ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) un **modèle image** paramétré, (D, $\mathscr{B}_D$) un **espace de décision** et $\Delta = D^{\mathscr{X}}$ l'ensemble des décisions possibles. On note $\delta \in \Delta$ une **règle de décision pure** et R (δ, θ) une **fonction de risque**.

On appelle **règle (de décision) « minimax »**, ou **règle (de décision) « inf-sup »**, tout élément $\delta_m \in \Delta$ qui rend minimum le plus grand risque associé aux **états** $\theta \in \Theta$ de la « **Nature** », ie tq :

(1) $\sup_{\theta \in \Theta} R(\delta_m, \theta) = \{\inf_{\delta \in \Delta} \sup_{\theta \in \Theta} R(\delta, \theta)\}$.

Si l'on note $r(\delta) = \sup_{\theta \in \Theta} R(\delta, \theta)$, (1) s'écrit aussi :

(2) $r(\delta_m) = \inf_{\delta \in \Delta} r(\delta)$.

(ii) La fonction $r : \Delta \mapsto \mathbf{R}$ qui associe à toute décision $\delta \in \Delta$ le risque maximum r (δ) précédent est parfois appelé **fonction de plus grand risque**, ou **fonction de risque maximum**.

(iii) La détermination des règles minimax conduit donc à la résolution d'un **problème d'optimisation** (défini par (1) ou par (2)). Un tel problème n'admet pas nécessairement de solution unique (cf aussi **programme maximin**). En **théorie des jeux**, ce problème correspond à la recherche d'un **point-selle** dans un jeu à deux joueurs.

Décider $\delta_m(x) = d_m \in D$ revient donc à adopter un comportement d'extrême prudence car d_m permet de se prémunir contre le risque le plus grand que la Nature fait courir au statisticien (cf **jeu statistique**). L'adoption d'un tel comportement est appelée, en théorie des jeux comme en Statistique, **principe (du) « minimax »**.

(iv) Par exension, on appelle parfois **règle (de décision) epsilon-minimax**, ou **règle (de décision) ε-minimax**, ou encore **règle (de décision) minimax epsilon-approchée**, ou **règle (de décision) minimax ε-approchée**, toute règle de décision δ_m tq il existe un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant :

(3) $r(\delta_m) \leq \inf_{\delta \in \Delta} r(\delta) + \varepsilon$.

(iv) Le principe du minimax ne s'impose pas toujours : d'autres principes (eg celui de l'**espérance mathématique**) lui sont souvent préférés. En effet, la fonction d'utilité du décideur intègre à la fois les probabilités des divers évènements possibles et les coûts associés à ces évènements : il peut donc exister des évènements « rares » assortis de coûts « prohibitifs », aussi bien que des des évènements « courants » assortis de coûts « raisonnables ». Lorsque le profil des probabilités et celui des coûts sont relativement étals, le critère de la moyenne peut être suffisant pour la prise de décision ; lorsque certaines probabilités ou certains coûts sont trop élevés, le critère du moindre risque peut sembler plus approprié.