RÉGRESSION À COEFFICIENTS ALÉATOIRES (G3, J1, J9)
(16 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) L'expression de **régression à coefficients aléatoires** peut désigner :

(a) soit un **modèle de régression** bayésien, pour lequel une **loi a priori** est imputée au vecteur des paramètres de la régression (cf eg **régression mixte**) ;

(b) soit un **modèle d'analyse de la variance** à effets aléatoires (modèle de type II) ;

(c) soit un modèle dont les observations se présentent sous forme de **séries temporelles** de **coupes instantanées**.

(ii) Ce dernier type de modèles s'écrit (C.R. RAO - P.A.V.B. SWAMY) :

(1) $y(n) = X(n)\, b(n) + u(n), \quad \forall\, n \in N_N^*,$

où, pour toute **coupe instantanée** $n \in N_N^*$:

(a) $y(n)$ est un $(T,1)$-**vecteur aléatoire** formé des T observations d'une **variable endogène** $\eta\,(n)$;

(b) $X(n)$ est une (T,K)-**matrice** formée des T observations de K **variables exogènes** $\xi_1\,(n)$,..., $\xi_K\,(n)$;

(c) $b(n) \in \mathbf{R}^K$ est un vecteur constitué de K **paramètres**, supposé aléatoire et tq, si l'on pose $b_0 = E\, b(n)$ et $V_0 = V\, b(n)$ (mêmes premiers moments), $\forall\, n \in N_N^*$, on ait :

(2) $b(n) = b_0 + v(n), \quad \text{avec} \quad E\, v(n) = 0, \quad V\, v(n) = V_0\,;$

(d) $u(n)$ est un **vecteur aléatoire** formé de T **perturbations aléatoires** et tq :

(3) $E\, u(n) = 0, \qquad V\, u(n) = \Sigma_n\,.$

On suppose, en outre, que, $\forall\, n \in N_N^*$ et $\forall\, (n', n'') \in N_N^* \times N_N^*$:

(a) les va $b(n)$ sont indépendantes entre elles ;

(b) les va $v(n)$ sont indépendantes entre elles ;

(c) les va $u(n')$ et $v(n'')$ sont indépendantes entre elles.

En posant :

(4) $w(n) = X(n)\, v(n) + u(n), \quad \forall\, n \in N_N^*,$

on obtient :

$$
(5) \quad \begin{cases} V\,w(n) \;=\; E\,w(n)\,w(n)' \;=\; X(n)\,V_0\,X(n)' + \Sigma_n\,, \\ E\,w(n')\,w(n'')' \;=\; C\,(w(n'), w(n'')) \;=0, \quad \forall\,(n', n'') \in (N_N{}^*)^2_{\neq}\,. \end{cases}
$$

Par ailleurs, en « empilant » les équations (1), on se ramène à la forme d'un **modèle linéaire** usuel :

$$
(6) \qquad y \;=\; X\,b + u \;=\; X\,e_N \otimes b_0 + X\,v + u \;=\; X\,e_N \otimes b_0 + w,
$$

avec :

$$
(7) \qquad E\,w \;=\; 0, \qquad V\,w \;=\; V,
$$

où l'on note (/// désignant des sauts de lignes) :

$$
(8) \quad \begin{cases} y \;=\; (y(1)\,,\ldots, y(N))' \in M_{NT,1}\,(\mathbf{R}) \text{ (vecteur colonne)}, \\ X \;=\; (X(1), 0, \ldots, 0 \;///\; 0, \ldots, 0, X(N)) \in M_{NT,NK}\,(\mathbf{R}) \text{ (matrice bloc-diagonale)}, \\ b \;=\; (b(1)\,,\ldots, b(N))' \in M_{NK,1}\,(\mathbf{R}) \text{ (vecteur colonne)}, \\ u \;=\; (u(1)\,,\ldots, u(N))' \in M_{NT,1}\,(\mathbf{R}) \text{ (vecteur colonne)}, \\ w \;=\; (w(1)\,,\ldots, w(N))' \in M_{NT,1}\,(\mathbf{R}) \text{ (vecteur colonne)}, \\ V \;=\; (V(1), 0, \ldots, 0 \;///\; 0, \ldots, 0, V(N)) \in M_{NT,NK}\,(\mathbf{R}) \text{ (matrice bloc-diagonale)}. \end{cases}
$$

On établit alors que le meilleur estimateur linéaire sans biais $b_0{}^{\wedge}$ de b_0 est de la forme :

$$
(9) \qquad b_0{}^{\wedge} \;=\; \{\Sigma_{n=1}{}^{N}\,X(n)'\,V_n{}^{-1}\,X(n)\}^{-1} \,.\, \{\Sigma_{n=1}{}^{N}\,X(n)'\,V_n{}^{-1}\,y(n)\}.
$$