RELATION D'ÉQUIVALENCE (A3)
(24 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020))

La **relation d'équivalence** est une notion mathématique de base (cf eg **espace L^p**, **mesures équivalentes**). Elle se rencontre souvent en **Statistique** : cf eg **échelle nominale**, **orbite**, **statistiques équivalentes**, **variables équivalentes**.

(i) Soit E un **ensemble** quelconque.

On appelle **relation d'équivalence** sur E toute relation binaire, notée ~, tq :

(a) $x \sim x, \forall x \in E$ (réflexivité) ;

(b) $x \sim y \Rightarrow y \sim x, \forall (x, y) \in E^2$ (symétrie) ;

(c) $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z, \forall (x, y, z) \in E^3$ (transitivité).

Etant donné un élément $x_0 \in E$, on appelle alors **classe d'équivalence** de x_0 l'ensemble des éléments de E équivalents à x_0 . On la note $x_0^{\sim}$ (ou $E_{x(0)}$, ou $E(x_0)$, ou $C_{x(0)}$ ou encore $C(x_0)$) :

(1) $x_0^{\sim} = \{x \in E : x \sim x_0\} \subset E$.

Si $E \neq \emptyset$, l'ensemble $\mathcal{C} = \{x^{\sim} : x \in E\}$ des classes d'équivalence constitue une **partition** de E.

Pour tout $x \in E$, l'application $x \mapsto x^{\sim}$ associe donc à x sa classe d'équivalence $x^{\sim}$.

Deux classes d'équivalence différentes ont des éléments différents (ie sont disjointes). L'application inverse de la précédente est donc une **application injective**. L'ensemble $\mathcal{C}$ est appelé **ensemble quotient** de E par la relation ~ ; on le note souvent E / ~ (cf **orbite d'un point**).

(ii) On considère un **espace mesurable** $(E, \mathcal{A})$ et une **relation d'équivalence** ~ définie sur E.

On dit que ~ est une **relation d'équivalence mesurable** ssi :

(2) $A^{\sim} = \cup_{x \in A} x^{\sim}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

(iii) La notion de relation d'équivalence simplifie souvent les raisonnements car utiliser un ensemble quotient revient à ne considérer que des classes tq $x^{\sim}$, et à ne plus distinguer un élément x d'un élément y dès que $y \in x^{\sim}$.

Souvent même, par abus de notation, on écrit $x \in E / \sim$ au lieu de $x^{\sim} \in E / \sim$.

Ainsi, lorsque $\mathscr{L}_{\mathbf{R}K}^{p}(\Omega,\mathscr{T},\mathscr{P})$, simplement noté $\mathscr{L}_{\mathbf{R}K}^{p}$, désigne l'espace des **vecteurs aléatoires** de puissance p-ième intégrable, on pose $\xi^{\sim} = \{\eta \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}K}^{p} : \eta = \xi$, P-p.s.$\}$ (la relation d'équivalence ~ est ici définie par l'égalité P-presque sûre des **va**). On écrit souvent alors $\xi \in L^p$ au lieu de $\xi^{\sim} \in L^p$, où $L^p = \mathscr{L}^{p} / \sim$. On écrit même, plus simplement, $\xi \in L^p$ avec la signification $\xi^{\sim} \in L^p$.