RELATION D'ORDRE (A3)
(29 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion algébrique de **relation d'ordre** (cf aussi **préordre**, **ordre**, **ordre lexicographique**) intervient dans de nombreux contextes, tant probabilistes que statistiques.

(i) Soit E un ensemble quelconque.

On appelle **relation d'ordre** sur E toute relation binaire, notée $\leq$, tq (cf aussi **préordre**) :

(a) $x \leq x$, $\forall\, x \in E$ (réflexivité) ;

(b) $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$, $\forall\, (x, y) \in E^2$ (antisymétrie) ;

(c) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$, $\forall\, (x, y, z) \in E^3$ (transitivité).

On dit que le couple $(E, \leq)$ est un **ensemble ordonné**.

Ainsi, un **groupe ordonné** est un ensemble de structure élémentaire ordonné.

(ii) Si, $\forall\, (x, y) \in E^2$, x et y sont des « **éléments comparables** » pour la relation d'ordre $\leq$ (ie si l'on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$), on dit que E est un **ensemble totalement ordonné** et que $\leq$ est une **relation d'ordre total** sur E.

Ainsi, l'**ordre lexicographique** définit une relation d'ordre total.

Sinon (cas général), on dit que E est un **ensemble partiellement ordonné** et que $\leq$ est une **relation d'ordre partiel** (ie la relation d'ordre $\leq$, en tant que relation binaire, n'est pas définie sur E x E tout entier).

(iii) Une relation binaire, notée $<$, est une **relation d'ordre** (au sens) **strict** sur E ssi il existe une relation d'ordre $\leq$ sur E tq :

(1) $\quad x < y \quad \Rightarrow \quad x < y$ et $y \neq x, \qquad \forall\, (x, y) \in E^2$.

Par distinction, $\leq$ est appelée **relation d'ordre** (au sens) **large**.

Etant donné une relation d'ordre $\leq$ sur E, on définit, de façon triviale, une **relation d'ordre inverse**, ou **ordre inverse**, notée selon :

(2) $\quad x \geq y \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x, \qquad \forall\, (x, y) \in E^2$.

(iv) Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ possède des **éléments remarquables**. Soit $A \subset E$. On appelle :

(a) **plus grand élément** de A tout élément $a \in E$ tq $x \leq a$, $\forall\, x \in A$ (a est alors unique) ;

(b) **majorant** de A tout élément $M \in E$ tq $x \leq M$, $\forall x \in A$;

(c) **borne supérieure**, ou **supremum**, de A le plus petit majorant (s'il existe) de A, et on la note $\sup_{x \in A} x$ ou sup A (si A possède un plus grand élément a, alors sup A = a) ;

(d) **élément maximal** de A un élément $a \in A$ tq le seul élément $x \in A$ tq $a \leq x$ est a lui-même, ie :

(3) $\forall x \in A, a \leq x \quad \Rightarrow \quad x = a.$

On définit resp de même, à partir de l'ordre inverse, un **plus petit élément**, un **minorant**, une **borne inférieure**, ou **infimum**, $\inf_{x \in A} x$ ou inf A et un **élément minimal** de A.

Un élément qui est soit un élément maximal, soit un élément minimal, de A est appelé **élément extrémal**.

On note souvent (eg en **théorie des processus**) $x \wedge y$ (resp $x \vee y$) le plus petit (resp le plus grand) de deux éléments $x \in E$ et $y \in E$:

(4)
$$x \wedge y = \min(x, y) = \inf(x, y),$$
$$x \vee y = \max(x, y) = \sup(x, y).$$

(v) Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ possède des **parties** remarquables, appelées **intervalles**. On appelle :

(a) **intervalle fermé**, ou **segment**, d'extrémités $a \in E$ et $b \in E$ l'ensemble $\{x \in E : a \leq x \leq b\}$. On note ce dernier $[a, b]$;

(b) **intervalle ouvert**, simplement **ouvert**, d'extrémités $a \in E$ et $b \in E$ l'ensemble $\{x \in E : a < x < b\}$ noté $]a, b[$;

(c) **intervalle semi-ouvert** à droite (resp à gauche) l'ensemble $\{x \in E : a \leq x < b\}$ noté $[a,b[$ (resp l'ensemble $\{x \in E : a < x \leq b\}$ noté $]a,b]$). Dans ce cas, les anglo-saxons notent souvent $[a,b)$ (resp $(a,b]$).

(vi) L'ensemble des intervalles de E est noté $\mathcal{I}(E)$. Lorsque les extrémités a et b ne jouent pas de rôle particulier, ou encore pour désigner un intervalle « générique », on note $|a, b| \in \mathcal{I}(E)$ un intervalle quelconque de E.

E étant un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$ (resp d'ordre strict $<$), il est souvent utile de définir, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, les ensembles :

(5)
$$E^n_{\leq} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E^n : x_1 \leq \ldots \leq x_n\},$$
$$E^n_{<} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E_n : x_1 < \ldots < x_n\}.$$

Ainsi, $\mathbf{R}^2_{\leq}$ désigne le « demi-espace » $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq y\}$.

(vii) Une extension de la notion d'ordre est celle d'ordre flou (cf **graphe flou**).

(viii) La notion d'ordre joue un rôle important en **calcul des probabilités** et en **Statistique**, où elle intervient aussi très souvent (cf diverses inégalités). Ainsi :

(a) en calcul des probabilités :

$(a)_1$ on définit diverses extensions du concept d'ordre : eg **ordre de ZWET**, **ordre stochastique** ;

$(a)_2$ la **théorie des processus** (probabiliste) suppose le plus souvent qu'un **processus stochastique** est indexé par un ensemble ordonné représentant le **temps** (processus temporels) ;

(b) dans la **production statistique** :

$(b)_1$ une **procédure statistique** (**plan d'expérience**, **plan de sondage**) « optimale » est généralement induite par une relation d'ordre associée à un optimande approprié (souvent une **fonction de perte**) ;

$(b)_2$ les grandeurs observables sont généralement repérées par une **échelle** propre, qui est naturellement ordonnée lorsque la grandeur est numérique. L'**observation** (**mesure**, etc) d'un phénomène peut concerner des variables (notamment des **variables qualitatives**) prenant leurs valeurs selon une **échelle de mesure** qui est une **échelle ordinale**. En effet, certaines des variables considérées comportent elles-mêmes une notion d'ordre (cf **variable ordinale**) ;

(c) dans un **problème d'optimisation** (cf **optimisation**) : la fonction à optimiser est généralement à valeurs dans un ensemble ordonné (le plus souvent, le corps **R** des nombres réels). Dans certains **contextes**, l'**utilité** du **statisticien**, celle de l'**homme de l'art**, ou encore celle d'un « décideur » extérieur, peut être prise en compte et optimisée (cf aussi **fonction d'utilité**) ;

(d) en **théorie de la décision** (statistique), une **règle de décision** (estimateurs, tests, prévision, classification) « optimale » résulte généralement d'une relation d'ordre associée à une fonction de perte (cf aussi **ordonnancement décisionnel**, **principe d'ordonnancement**). Ainsi, on peut être conduit à considérer une **alternative ordonnée** (théorie des tests), une **classification ordonnée** (cf **classification**) ou encore une **ordonnance** (cf **analyse des données**) ;

(e) en théorie de l'**échantillonnage**, une **statistique d'ordre** (eg l'échantillon ordonné) est souvent associée à un **échantillon aléatoire** donné ;

(f) on définit souvent les notions de **statistique ordonnée**, d'**estimateur d'ordre**, de **transformation de rang, d'ordre** ou encore de **valeur extrême**. L'ordre intervient encore dans certains tests (cf **alternative ordonnée**) ou certaines classifications (cf **classification ordonnée**).