REPRÉSENTATION DE BAHADUR (C5, F3)
(23 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

L'étude (asymptotique) d'un **quantile** conduit à des formules reliant le **quantile empirique** à son analogue théorique (cf **quantile théorique**).

(i) Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** et $X = (X_1, ..., X_N)$ un **échantillon iid** selon la loi P^ξ de ξ. On note $f = dP^\xi / d\lambda$ la **densité** et F la **fr** associées à P^ξ, F_N la **fr empirique** associée à X, et l'on suppose que :

(a) $\xi \in \mathscr{L}_\mathbf{R}^2 (\Omega, \mathscr{T}, P)$ (variable de carré intégrable) ;

(b) si $Q_p\, \xi$ est le p-quantile théorique de ξ (avec $p \in]0, 1[$), celui-ci est unique et tq :

(1) $F' (Q_p\, \xi) = f (Q_p\, \xi) > 0$;

(c) $F'' = f'$ existe, et c'est une fonction bornée sur un voisinage de $Q_p\, \xi$.

(ii) Par suite, si le p-quantile empirique $q_N X$ de X est unique, sa **représentation de R.R. BAHADUR** s'écrit (cf **formule de TAYLOR stochastique**) :

(2) $q_N X = Q_p\, \xi + (f (Q_p\, \xi))^{-1} . \{(1 - F_N (Q_p\, \xi)) - (1 - p)\} + o_P (N^{-1/2})$,

où o_P désigne petit zéro en probabilité, ie $\text{P-lim}_{N \to \infty}\, o_P (N^{-1/2}) = 0$ (cf **ordres de convergence en probabilité**).