

RESTRICTION (D'UNE APPLICATION, D'UNE MESURE) (A5)

(22 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Notion mathématique de base qui intervient de façon constante en **théorie de la mesure**, en **calcul des probabilités** et en **Statistique**.

(i) Soit E et F deux **ensembles** quelconques, $A \subset E$ et $f : E \mapsto F$ une **application**.

On appelle **restriction** de f à A , et l'on note $f|_A$, l'application $A \mapsto F$ définie par :

$$(1) \quad x \in A \mapsto f|_A(x) = f(x).$$

$f|_A$ est aussi appelée **application restreinte**, ou **application induite** (par A).

(ii) Soit E un ensemble quelconque muni d'un **clan** (resp d'un σ -clan, resp d'une **tribu de parties**) $\mathcal{G}$, μ une **mesure positive** sur $\mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{G}$ une **partie mesurable** donnée. Alors l'ensemble :

$$(2) \quad \mathcal{C}_{/A} = \{A \cap B : B \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{G}$$

est un clan (resp un σ -clan, resp une tribu) sur A .

On appelle **restriction** de μ à A , ou **mesure induite** par μ sur A , la restriction, notée $\mu|_A$, de μ à l'ensemble $\mathcal{C}_{/A}$: $\mu|_A$ est appelée **mesure restreinte**, ou **mesure induite**.

(iii) Une seconde définition, voisine de la première, considère, au lieu de (2), l'ensemble :

$$(3) \quad \mathcal{C}_{/A} = \{B \in \mathcal{G} : B \subset A\} \subset \mathcal{G}.$$

La restriction de μ à A est alors la mesure $\mu|_A$ précédente.

(iv) Si $A \subset E$ (resp $A \in \mathcal{G}$), et si $f : E \mapsto \mathbf{R}$ est tq la fonction $\mathbf{1}_A f$ est positive et mesurable, alors la restriction $f|_A$ de f à A est positive et mesurable.

On établit alors la **formule d'intégration pr à une mesure restreinte** :

$$(4) \quad \int f|_A d\mu|_A = \int \mathbf{1}_A f d\mu, \quad \forall A \subset E \text{ (resp } \forall A \in \mathcal{G}).$$