RISQUE BAYÉSIEN (G3)
(23 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) On considère un problème de **décision statistique** fondé sur un **modèle statistique** image ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) paramétré par Θ, un **espace de décision** (D, $\mathscr{B}_D$) et un ensemble Δ de **règles de décision pures** δ. On admet, conformément aux principes de l'**école bayésienne**, que P_θ^X est une **probabilité de transition** définie sur $\Theta \times \mathscr{B}$, et l'on définit une **loi a priori** Π sur une **tribu de parties** de Θ, notée $\mathscr{B}_\Theta$, ainsi qu'une va id_Θ (**identité** de Θ), donc distribuée selon la loi Π.

On appelle alors **fonction de risque bayésienne**, ou **fonction de risque de T. BAYES**, ou encore **fonction de risque a priori**, associée à δ la fonction $R_\Pi : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+$ définie par :

(1) $$R_\Pi (\delta) = E_\Pi R (\delta, id_\Theta) = \int R (\delta, \theta) d\Pi (\theta),$$

expression dans laquelle R désigne la **fonction de risque** usuelle.

Autrement dit, en notant L la **fonction de perte** du problème, on a :

(2) $$R_\Pi (\delta) = \int_{\mathscr{X} \times \Theta} L (\delta (x), \theta) dP_\theta^X (x) d\Pi (\theta).$$

(ii) Si l'on remplace Δ par l'ensemble Δ_m des **règles de décision mixtes** m, on appelle, de même, **fonction de risque bayésienne**, ou **fonction de risque de T. BAYES**, ou encore **fonction de risque a priori**, associée à une règle mixte m la fonction $R_\Pi : \Delta_m \mapsto \mathbf{R}_+$ définie par :

(3) $$R_\Pi (m) = E_\Pi R (m, id_\Theta) = \int_\Theta R (m, \theta) d\Pi (\theta),$$

où R (m, θ) est le risque associé à la décision mixte m, ie :

(4) $$R (m, \theta) = \int_D L (d, \theta) dP_\theta^X (x) dm_x (d).$$

(iii) Comme pour une fonction de risque usuelle (ie classique), une fonction de risque bayésienne permet de définir un préordre sur Δ (ou sur Δ_m), préordre dont les éléments extrémaux ne sont autres que les **règles de BAYES** (cf **élément extrémal**).

(iv) Il est aussi possible de définir des (fonctions de) risque(s) bayésien(ne)s vectoriel(le)s à partir de fonctions de perte vectorielles.