RISQUE DE PITMAN (C5, G3)
(12 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Dans un **problème d'estimation** relative à un **paramètre de position**, on considère :

(a) un **modèle statistique** de base $(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$, avec $\Theta = \mathbf{R}$ (ou un **groupe** abélien additif et ordonné) ;

(b) un groupe (additif) mesurable $(\mathcal{X}_0 , \mathcal{B}_0)$ (**espace d'observation**) et un **échantillon** $X = (X_1 ,..., X_N)$. On suppose cet **échantillon iid** selon l'une des lois $P_\theta^\xi = \xi (P_\theta)$ $(\forall \theta \in \Theta)$, où $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}_0$ est une **va** donnée (cf **variable parente**). Autrement dit, $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}_0^N$;

(c) l'hypothèse selon laquelle, $\forall \theta \in \Theta$, P_θ^ξ admet une **densité** $f (., \theta) = dP_\theta^\xi / d\mu$ pr à une **mesure abstraite** positive μ définie sur $\mathcal{B}_0$, densité de la forme :

$$(1) \qquad f (x, \theta) = f_0 (x - \theta), \qquad \forall (x, \theta) \in \mathcal{X}_0 \times \Theta,$$

où f_0 est une densité donnée (eg $f_0 = f (x, 0)$). Ceci implique donc que $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta) = (\mathcal{X}_0 , \mathcal{B}_0)$.

(d) une **fonction de perte quadratique**, ie tq :

$$(2) \qquad L (d, \theta) = (d - \theta)^2, \qquad \forall (d, \theta) \in D \times \Theta,$$

l'ensemble des décisions possibles étant ici $D = \Theta = \mathcal{X}_0$ (**estimateur ponctuel** de θ).

(ii) On appelle alors **(fonction de) risque de E.J.G. PITMAN** la fonction de risque associée au problème précédent, ie la fonction $R : \Delta \times \Theta \mapsto \mathbf{R}$ dans laquelle Δ est l'ensemble des **règles de décision** pures (ou estimateurs purs) $\delta : \mathcal{X}_0^N \mapsto D$.

Si $s : \mathcal{X}_0^N \mapsto \Theta$ est une **statistique équivariante** et si $\mathcal{X} = \mathbf{R}$, on montre que $R (s (X), \theta)$ ne dépend pas du **paramètre** θ. On appelle alors **estimateur de E.J.G. PITMAN** l'estimateur de θ qui minimise R uniformément sur Θ.