RISQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE (I1)
(08 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle image**, $\Theta_0 \subset \Theta$ une **partie** non vide et $H_0 : \theta \in \Theta_0$ une **hypothèse de base**. On considère le **test** de H_0 à l'aide d'un **test pur** $\delta \in \Delta$ dont la **région critique** est $w \in \mathscr{B}$ (cf **test d'hypothèses**).

(i) On appelle alors **(fonction de) risque de première espèce**, ou **(fonction de) risque de type I**, ou encore **erreur de première espèce**, ou **erreur de type I**, la fonction notée $\alpha_.(w) : \Theta_0 \mapsto [0,1]$ définie par :

(1) $\quad \theta \in \Theta_0 \;\mapsto\; \alpha_\theta(w) \;=\; P_\theta^X(w) \;=\; P_\theta^X(\delta^{-1}(d_1))$,

où $d_1 \in D = \{d_0 , d_1\}$ (ensemble de **décision** du **problème de test**).

Cette fonction exprime la probabilité de refuser à tort l'hypothèse de base H_0 , ie la probabilité de refuser H_0 alors que cette hypothèse est vraie.

(ii) Plus généralement, si $m \in \Delta_m$ est un **test mixte**, on appelle **(fonction de) risque de première espèce** la fonction, notée comme précédemment, définie par :

(2) $\quad \theta \in \Theta_0 \;\mapsto\; \alpha_\theta(w) \;=\; E_\theta\, \varphi(X)$ $\qquad$ (aussi notée $E_\theta\, \varphi$),

avec $E_\theta\, \varphi(X) = \int_\Theta m_x(d_1)\, dP_\theta^X(x)$, où $\varphi : \mathscr{X} \mapsto [0, 1]$ est l'application partielle $x \mapsto m_x(d_1) = \varphi(x)$ définie par le test m.

Les notations (1) ou (2) sont aussi remplacées par $\alpha_{\theta 0}(w) = P_{\theta 0}^X(w)$: θ_0 représente alors un élément générique de Θ_0 (par commodité, on note θ0 pour θ_0). Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on note même, pour simplifier, $\alpha_0(w) = P_0^X(w)$ (même signification).

(iii) Si le problème de test se présente sous forme non paramétrée, le modèle est noté $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \mathscr{P}^X)$. On considère une partie non vide de $\mathscr{P}^X$, notée $\mathscr{P}_0^X$, et l'**hypothèse de base** s'écrit $H_0 : P^X \in \mathscr{P}_0^X$.

On appelle alors **(fonction de) risque de première espèce** la fonction, notée $\alpha_.(w)$, définie par :

(3) $\quad P^X \in \mathscr{P}_0^X \;\mapsto\; \alpha_P(w) \;=\; P^X(w)$.

Son interprétation est identique à la précédente.

(iv) En **théorie des tests**, se pose généralement le problème du **choix du risque** de première espèce :

(a) dans la **théorie de J. NEYMAN - E.S. PEARSON**, l'**homme de l'art** ou le **statisticien** fixent un seuil maximum « tolérable » α_0 au risque de première espèce, avec, en général, $\alpha_0 > 0$ mais $\alpha_0 << 1$: eg $\alpha_0 = 10^{-2}$, ou $\alpha_0 = 5 \,.\, 10^{-2}$, ou encore $\alpha_0 = 10 \,.\, 10^{-2}$. Souvent, le seuil α_0 est d'autant plus faible que l'homme de l'art ou le statisticien est plus **averse au risque** de se tromper à tort.

Ce seuil α_0 est donc généralement choisi en fonction de la nature du problème concret, ie du **domaine de connaissance** dans lequel il se pose, ou du **phénomène** considéré lui-même. Il dépend aussi du risque de réalisation de l'hypothèse privilégiée (H_0). Ainsi, on peut fixer :

(a_1) biologie (pharmacologie) : une valeur « faible » à α_0 (eg $\alpha_0 = 10^{-3}$) lorsqu'il s'agit de « tester » l'effet d'un nouveau médicament, car les risques sont importants ;

(a_2) sociologie (anthropologie) : une valeur plus élevée à α_0 (eg $\alpha_0 = 10^{-1}$) s'il s'agit de « tester » l'appartenance d'un crâne à une famille d'hominidés déjà identifiée (cf **discrimination**), car les **observations** peuvent être de qualité médiocre ou l'enjeu d'importance faible.

On interprète d'ailleurs souvent α_0 comme la **fréquence** limite maximum des occurrences de l'**événement** $H_0 : \theta \in \Theta_0$ (ou $H_0 : P^X \in \mathcal{P}_0{}^X$) lorsque le nombre d'observations $N \to +\infty$;

(b) une **approche bayésienne** du choix de α consiste à considérer ce « seuil » maximum comme une va assortie d'une **loi a priori** $\Pi(\alpha)$, puis à estimer cette loi (soit au vu d'expériences antérieures, soit à l'aide d'autres expériences menées en parallèle) ;

(c) une **approche subjective** consiste à considérer α comme un argument de la **fonction d'utilité** du statisticien, fonction que celui-ci cherche donc à maximiser.

(v) En contrôle de qualité (cf **contrôle de réception**), le risque de première espèce s'appelle **risque du producteur**, ou **risque du vendeur**.