

RISQUE QUADRATIQUE (G3)

(07 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Le **risque quadratique (moyen)** est une **fonction de risque** particulière qui possède des propriétés de calcul simples. Ceci explique son emploi fréquent, notamment avec des modèles de type gaussien.

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle statistique**, $g : \Theta \mapsto \mathbf{R}^Q$ un « **paramétrage** » de Θ et $T : \Omega \mapsto \mathbf{R}^Q$ un **estimateur** de la forme $T = t(X)$ du **paramètre** $\tau = g(\theta)$. On suppose que T est de carré intégrable.

On appelle alors **(fonction de) risque quadratique** relative à T la fonction matricielle $R_\bullet(T) : \Theta \mapsto S_Q(\mathbf{R})$ définie par l'**écart quadratique moyen** de T :

$$(1) \quad R_\theta(T) = Q_\theta(T) = E_\theta(T - \tau)(T - \tau)',$$

avec la notation usuelle $E_\theta \varphi(T, \theta) = \int \varphi(t(x), \theta) dP_\theta^X(x)$ pour toute fonction φ .

(ii) Si S est un autre estimateur de carré intégrable de t , on dit que T est **préféré** à S , et l'on note $T \succ S$, ssi :

$$(2) \quad R_\theta(T) \leq R_\theta(S), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

l'inégalité matricielle précédente étant entendue au sens des **formes quadratiques** (positives) associées, ie :

$$(3) \quad \forall (A, B) \in S_Q(\mathbf{R}) \times S_Q(\mathbf{R}), \quad A \leq B \Leftrightarrow x' A x \leq x' B x, \quad \forall x \in \mathbf{R}^Q.$$

L'inégalité (2) définit une **relation d'ordre** au sens large, appelée **relation de préférence au sens large**.

On en déduit la **relation de préférence au sens strict** suivante. T est strictement préféré à S ssi T est préféré à S (au sens $T \succ S$ précédent) ssi, de plus :

$$(4) \quad \exists \theta_0 \in \Theta \text{ tq } R_{\theta_0}(T) \neq R_{\theta_0}(S),$$

où θ_0 désigne, par commodité, θ_0 . On note alors $T \succ\prec S$.

On dit enfin que T est un **estimateur admissible** ssi il n'existe pas d'estimateur $S \neq T$ tq $S \succ\prec T$. Autrement dit, R est un **élément maximal** (au sens de $\succ$) dans l'ensemble des estimateurs de carré intégrable de $\tau = g(\theta)$ (cf **élément extrémal**).