ROBUSTESSE (DE BICKEL-LEHMAN) (C5, G8)
(12 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un **modèle statistique**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation**, $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **variable aléatoire** (**échantillon**) et Γ un ensemble de **caractéristiques** associé à la famille $\mathcal{P}^{\xi}$ des lois images $P^X = X(P)$, $\forall P \in \mathcal{P}$.

On dit que l'**application caractéristique** $c : \mathcal{P}^X \mapsto \Gamma$ est une **fonctionnelle robuste** en $P_0^X \in \mathcal{P}^X$ ssi c est continue dans un voisinage de P_0^X (cf aussi **robustesse**).Ceci suppose la donnée d'une **topologie**, définie eg à partir d'une **distance** d sur $\mathcal{P}^X$ et une distance δ sur Γ (**distance de LÉVY**, **distance de PROKHOROV**, etc) (cf **espace métrique**, **espace topologique**).

(ii) Soit $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** dont la **loi** est l'une des lois $P^{\xi} = \xi(P)$, $\forall P \in \mathcal{P}$. On note $\mathcal{P}^{\xi}$ la **famille** des lois ainsi définies, $\mathcal{F}$ la famille des **fr** associée à $\mathcal{P}^{\xi}$ et Γ un ensemble de caractéristiques associé à $\mathcal{F}$. On considère une **fonctionnelle** $c : \mathcal{P}^X \mapsto \Gamma$ et l'on pose, $\forall F \in \mathcal{F}$ et $\forall a \in \mathbf{R}_+^*$:

$$(1)\quad \begin{aligned} F^-(x, a) &= \mathbf{1}_{]-\infty,-a]}(x) \,.\, F(x) + \mathbf{1}_{[-a,0[}(x) \,.\, F(-a) + \mathbf{1}_{\mathbf{R}+}(x), \\ F^+(x, a) &= \{1 - \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)\} + \mathbf{1}_{[0,a[}(x) \,.\, F(a) + \mathbf{1}_{]a,+\infty]} F(x). \end{aligned}$$

On peut alors définir sur $\mathcal{F}$ une topologie (dépendant de c) tq :

$$(2)\quad F_n \xrightarrow{(c)}_{n \to +\infty} F_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \lim_n F_n = F_\infty & (\text{convergence en loi}) \\ \lim_n c(F_n) = c(F_\infty) & (\text{continuité de c en } F_\infty) \\ \lim_{a \to \infty} \lim_n \sup \{c(F_n^+(.\,, a)) + |c(F_n^-(.\,, a))|\} = 0. & \end{array}$$

On dit que c est une **fonctionnelle robuste au sens de P.J.B. LEHMANN** ssi c vérifie (2).

Par suite, on dit qu'une fonctionnelle c' est plus robuste qu'une fonctionnelle c'' au sens de P.J. BICKEL-P.J.B. LEHMANN (**robustesse relative**) ssi c' est continue pour la topologie induite par c''.