SEMI-MARTINGALE (N2)
(21 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Soit X = {(Ω, $\mathscr{T}$, P), ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$), $(X_t)_{t \in T}$} un **processus stochastique** et $\mathscr{F}$ = $(\mathscr{T}_t)_{t \in T}$ une **filtration** sur $\mathscr{T}$.

On suppose que :

(a) T = **N** (ou $\mathbf{R}_+$) (**temps** discret ou continu) ;

(b) ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) = (**R**, $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$) (**espace d'état** numérique).

On dit que X est une **semi-martingale** associée à $\mathscr{F}$ ssi X peut s'écrire :

(1) $X = Y + M$,

où :

(a) $Y = (Y_t)_{t \in T}$ est un **processus à variation(s) finie(s)** ;

(b) $M = (M_t)_{t \in T}$ est une **martingale locale**, ie il existe une **suite** $(\tau_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de **temps d'arrêt** croissant P-p.s. vers +∞ et tq, ∀ n ∈ **N**, le processus $(M_{t \wedge \tau(n)})_{t \in T}$ est une **martingale**. On note τ(n) pour désigner τ_n , et s ∧ t désigne l'opération inf (s, t).

(ii) Si X est une martingale (resp une sous-martingale, resp une sur-martingale), alors X est aussi une semi-martingale.