SÉRIE DE CHARLIER (A4, A10, C4)
(21 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **série de CHARLIER** se relie notamment au **théorème de la limite centrale**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de loi P^ξ et $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite iid** constituée de **copies** de la **variable parente** ξ. On suppose que P^ξ est un **loi absolument continue** pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 , que $f = dP^\xi / d\lambda_1$ désigne sa densité, et que :

$$(1) \qquad \begin{aligned} &E\,\xi = 0, \quad V\,\xi = \sigma^2 && \text{(premiers moments)} \\ &E\,(\xi - E\,\xi)^j = \mu_j \quad (\forall\, j \geq 3) && \text{(moments centrés d'ordres j).} \end{aligned}$$

On définit la **variable aléatoire** (ou **statistique**) :

$$(2) \qquad R_N = \sigma^{-1} . N^{-1/2} S_N , \qquad \text{avec } S_N = \Sigma_{n=1}^{N} X_n , \ \forall\, N \in \mathbf{N}^*,$$

et l'on note h_N la **densité de probabilité** de R_N .

On appelle alors :

(a) **série de C.V.L. CHARLIER de type A** le développement en série suivant :

$$(3) \qquad h_N(x) = \Sigma_{j=1}^{\infty} (j\,!)^{-1} a_j \, \varphi^{(j)}(x), \qquad \forall\, x \in \mathbf{R},$$

où $\varphi^{(j)}$ est la j-ième **dérivée** de la densité φ de la **loi normale réduite** $\mathcal{N}(0, 1)$, et où les coefficients a_j dépendent des moments μ_k (avec $k \leq j$) et de N.

En particulier, on montre que :

$$(4) \qquad \begin{aligned} &a_0 = 1, && a_1 = a_2 = 0, \\ &a_3 = -\,\sigma^{-3} . N^{-1/2} \mu_3 , && a_4 = N^{-1} . \{(\sigma^{-4} . \mu_4) - 3\}. \end{aligned}$$

La définition (3) est aussi présentée sous la forme :

$$(3)' \qquad h_N(x) = \varphi(x, \mu, \sigma) + \Sigma_{j=3}^{\infty} (-1)^j (j\,!)^{-1} \alpha_j \, \varphi^{(j)}(x, \mu, \sigma), \quad \forall\, x \in \mathbf{R},$$

dans laquelle $\varphi(., \mu, \sigma)$ est la densité de la **loi normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et où les coefficients α_j dépendent des **cumulants** K_k (avec $k \leq j$) de P^ξ, ainsi que de N.

(b) **série de C.V.L. CHARLIER de type B** le développement en série suivant :

$$(5) \qquad h_N(x) = \psi(x) + \Sigma_{j=1}^{\infty} b_j \, \Delta^j \, \psi(x), \qquad \forall\, x \in \mathbf{R},$$

où :

(6) $\psi(x) = \pi^{-1} e^{-\lambda} \int \mathbf{1}_{[0, +\pi]} \cos(\lambda \sin\omega - x \, . \, \omega) \, e^{\lambda \cos\omega} \, d\omega$,

et où $\Delta^j \psi(x) = \Delta(\Delta^{j-1} \psi(x))$, avec $\Delta^1 \psi(x) = \psi(x) - \psi(x-1)$, est la suite des **différences finies** de ψ. Dans (6), on suppose que $\lambda > 0$.

(c) **série de C.V.L. CHARLIER de type C** le développement en série suivant :

(7) $h_N(x) = \exp\{\Sigma_{j=0}^{\infty} c_j H_j(x)\}$, $\forall x \in \mathbf{R}$,

où les H_j désignent les **polynômes de HERMITE**.

(ii) Diverses extensions ou variantes des définitions précédentes ont été étudiées.