SÉRIE DE FOURIER (A9, A10, A16, J8, N7)
(21 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **série de FOURIER** est l'une des bases de l'**analyse dans l'espace des fréquences**, qui concerne les **séries temporelles** et leurs **processus** générateurs (cf **fréquence**, **transformée de FOURIER**).

(i) Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **fonctions numériques** (fonctions réelles) $f_n : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$. On définit la série de fonctions suivante :

(1) $\quad f(x) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} \; f_n(x), \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}.$

On dit que f est une **série trigonométrique** ssi, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, il existe deux suites réelles $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tq :

(2) $\quad f_n(x) = a_n \,.\, \cos n\, x + b_n \,.\, \sin n\, x, \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}.$

(ii) On montre que :

(a) si la série trigonométrique {(1),(2)} est convergente, alors f est périodique de **période** $2\,\pi$;

(b) si les séries définies par les suites a et b (ie $\Sigma_{n \in \mathbf{N}}\, a_n$ et $\Sigma_{n \in \mathbf{N}}\, b_n$) sont absolument convergentes, la série trigonométrique {(1),(2)} est absolument et uniformément convergente sur **R** (cf **convergence uniforme**) ;

(c) si les suites a et b sont à termes positifs (ie si $a_n > 0$ et $b_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$) et si elles sont décroissantes et de limites nulles (ie $a_{n+1} < a_n$ et $b_{n+1} < b_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, et $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0+$), alors la série trigonométrique {(1),(2)} est convergente $\forall\, x \notin 2\, \mathbf{N}\, \pi$ (multiples pairs de π) ;

(d) si les séries définies par les suites a et b sont convergentes, la fonction f définie par {(1),(2)} est continue et périodique de période $2\,\pi$. On peut l'intégrer terme à terme.

(iii) Le problème inverse du précédent consiste, étant donné une fonction $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, à définir une série trigonométrique dont f soit la somme, ce qui implique que f soit périodique de période $2\,\pi$.

Par suite, si f est représentable sous la forme {(1),(2)}, l'intégration terme à terme de l'équation définie par {(1),(2)} conduit, $\forall\, a \in \mathbf{R}$, aux égalités :

(3)
$$a_n = \pi^{-1} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos n\, x \, dx,$$
$$b_n = \pi^{-1} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin n\, x \, dx.$$

On appelle alors **série de J.B.J. FOURIER** de f toute série trigonométrique qui vérifie (3).

Sous des conditions relatives à f, on montre que la série de FOURIER d'une **fonction intégrable** f est (ponctuellement) convergente (cf **convergence simple**) et admet pour somme : (1/2) {f (x +) + f (x -)}, somme égale à f (x) si f est continue en x.

Plus généralement, si $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ est périodique de période $p > 0$ (ie si $f(x + p) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$), son **développement en série de FOURIER** est de la forme :

(4) $$f(x) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} \ a_n \cdot \cos\{(2 \pi n x) / p\} + b_n \cdot \sin\{(2 \pi n x) / p\}, \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

avec :

(5) $$\begin{aligned} a_n &= (2 / p) \int_a^{a+p} f(x) \cos\{(2 \pi n x) / p\} \, dx, \\ b_n &= (2 / p) \int_a^{a+p} f(x) \sin\{(2 \pi n x) / p\} \, dx, \end{aligned} \qquad \forall a \in \mathbf{R},$$

le scalaire $a \in \mathbf{R}$ étant arbitraire.

On note que $a_0 = 2 \, \overline{f}$, où $\overline{f}$ est la valeur moyenne de f sur le segment [a, a + p].

On peut écrire (4) sous forme complexe (équivalente) :

(4)′ $$f(x) = \Sigma_{n \in \mathbf{Z}} \, c_n \cdot \exp(i \, \omega_n x), \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

avec :

(5)′ $$c_n = (1 / p) \int_a^{a+p} f(x) \exp(- i \, \omega_n x) \, dx, \quad \forall n \in \mathbf{Z},$$

en notant $\omega_n = (2 \pi n) / p$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

On a donc les relations suivantes entre coefficients :

(6) $$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} , \\ b_n &= i \, (c_n + c_{-n}), \end{aligned} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\},$$

(avec $a_0 = c_0$).

L'**égalité de F.F.W. BESSEL - M.A. PARSEVAL** s'écrit ici (cf **égalité de PARSEVAL**) :

(7) $$\Sigma_{n \in \mathbf{Z}} \ |c_n|^2 = (1 / p) \int_a^{a+p} |f(x)|^2 \, dx, \qquad \forall a \in \mathbf{R}.$$

Les propriétés et relations précédentes se généralisent dans le cadre de la **transformation de FOURIER**. Ainsi, lorsque $p \to \infty$ dans (4)′, on obtient les **relations de réciprocité**, ou **formules de réciprocité** (cf aussi **formule d'inversion de FOURIER**) :

(8) $$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} e^{itx}\, g(t)\, dt, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

avec :

(9) $$g(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} e^{-itx}\, f(x)\, dx, \qquad \forall t \in \mathbf{R},$$

(iv) L'**analyse de FOURIER** s'étend à des fonctions numériques à plusieurs variables. Elle est au départ de l'**analyse harmonique** des fonctions ou des **processus**.

(iv) Les notions précédentes reçoivent divers développements :

(a) en analyse : par exemple, si f est une fonction « déterministe » et si x représente le **temps**, il est souvent possible d'approximer numériquement f à l'aide des premiers termes de son développement en série de FOURIER (cf **approximation**) ;

(b) en **Statistique** : parallèlement à ce qui précède, si f est une **fonction aléatoire**, représentant eg une **trajectoire** d'un processus, il est possible de l'approximer (cf **estimation**) à partir d'une trajectoire « moyenne » (cf aussi **analyse spectrale**).