SOLUTION DES MOINDRES CARRÉS (D'UN SYSTÈME LINÉAIRE) (A3, A4, A11)
(10 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit un **système linéaire** :

(1) $A\,x = b$

dans lequel $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^m$ sont donnés. On note S (A , b) l'ensemble des solutions de (1), q la **forme quadratique** associée à la **matrice** unité I_m :

(2) $u \in \mathbf{R}^m \mapsto q(u) = u'\,u \in \mathbf{R}$

et || . || la **norme** associée à q, définie par $||u|| = (u'\,u)^{1/2}$.

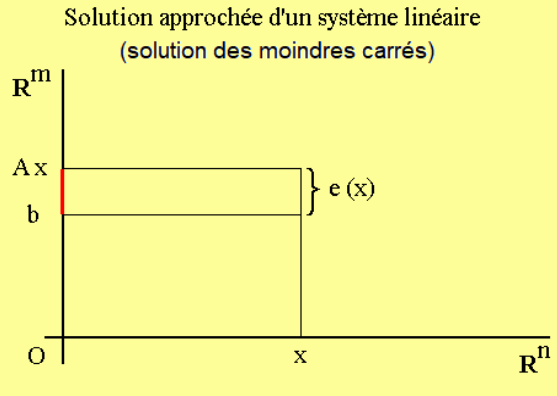
Si S (A , b) ≠ ∅ (système sans solution algébrique « ordinaire »), on appelle **solution des moindres carrés (ordinaires)**, ou **pseudo-solution**, du système (1) tout vecteur $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ tq :

(3) $q(A\,\tilde{x} - b) \leq q(A\,x - b), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n,$

ie tq :

(4) $q(e(\tilde{x})) = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} q(e(x)), \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n,$

où e (x) = A x - b est appelé **vecteur d'écart** associé à x, ∀ x ∈ $\mathbf{R}^n$), ou encore **fonction résidu(elle)**, ou **fonction d'écart** du système (1) (cf schéma ci-après).



(ii) La notion précédente procède de l'idée suivante. S (A , b) = ∅ parce que A x ≠ b. Par suite, ∀ x ∈ $\mathbf{R}^n$, il existe une fonction e : $\mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^m$ tq A x + e (x) = b. Le scalaire q (e (x)) est appelé **déviation des moindres carrés (ordinaires)** de l'équation (1) au point x.

On montre que $\tilde{x}$ est **solution des moindres carrés** ordinaires de (1) ssi :

(5) $A\,\tilde{x} = pr_{Im(A)}\, b$ (**projection** de b sur l'image de A)

(iii) Plus généralement, soit Q une **matrice définie positive** ($Q \in D^{+}_{m}(\mathbf{R})$), q_Q la forme quadratique associée à Q selon :

(2)' $u \in \mathbf{R}^m \mapsto q_Q(u) = u' Q^{-1} u \in \mathbf{R}$,

et $||.||_Q$ la norme associée à q_Q et définie par $||u||_Q = (u' Q^{-1} u)^{1/2}$.

On appelle **solution des moindres carrés généralisés**, ou **pseudo-solution dans la métrique Q**, du système (1) un vecteur $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ tq :

(3)' $q_Q(A\tilde{x} - b) \leq q_Q(A x - b), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$,

ou, de façon équivalente, tq :

(4)' $q_Q(e(\tilde{x})) = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} q_Q(e(x)), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$.

(iv) Les notions précédentes sont associées à celle de **matrice pseudo-inverse**.

En **Statistique**, ainsi qu'en calcul numérique (systèmes d'équations « mal conditionnés »), les méthodes de résolution utilisent souvent les solutions de moindres carrés (cf **méthode des moindres carrés**, **méthode des moindres carrés ordinaires**, **méthode des moindres carrés généralisés**, etc).