SPECTRE (D'UN OPÉRATEUR, D'UNE MATRICE) (A3)

(i) Soit E un **espace normé** sur le corps **C** et soit f : E $\mapsto$ E un **endomorphisme** (ou « opérateur ») de (ou dans) E : f $\in$ End (E) (cf **homomorphisme**). L'ensemble $\mathscr{L}$(E) = $\mathscr{L}$(E, E) des **opérateur** continus dans E est une **algèbre** (non commutative) sur **C** pour les opérations :

(1)
$$(\lambda, \mu), (f, g) \mapsto \lambda . f + \mu . g,$$
$$(f, g) \mapsto f \circ g.$$

$\mathscr{L}$(E) admet pour (élément) unité l'**application identique** id_E .

(ii) Si f $\in$ $\mathscr{L}$(E), on dit que :

(a) $\lambda \in$ **C** est une **valeur régulière** de f ssi l'opérateur :

(2) $$g = f - \lambda . id_E$$

admet un inverse $g^{-1} \in \mathscr{L}(E)$;

(b) $\lambda \in$ **C** est une **valeur spectrale**, ou une **valeur singulière**, de f ssi l'opérateur g précédent n'est pas inversible.

L'ensemble des valeurs spectrales de f s'appelle **spectre** de (l'opérateur continu) f, et on le note $Sp_{\mathbf{C}}$ f ou Sp f ;

(c) une valeur spectrale $\lambda \in$ **C** de f est une **valeur propre** de f ssi elle vérifie :

(3) $$Ker (f - \lambda . id_E) \neq \{0\}.$$

Tout vecteur $x \neq 0$ tq $x \in Ker (f - \lambda . id_E)$, ie tq $f (x) = \lambda . x$, est alors appelé **vecteur propre** de f associé à λ. L'ensemble de tels x est appelé **sous-espace propre** de f associé à λ : on le note E_λ , ou $E(\lambda)$, ou encore $E_\lambda(f)$.

(iii) Si E est de dimension finie (avec dim E = n), on montre que :

(4)
$$\lambda \in Sp f \Rightarrow \lambda \text{ est valeur propre de } f ;$$
$$card (Sp f) \leq n ;$$
$$\lambda \in Sp f \Leftrightarrow dét (f - \lambda . id_E) = 0.$$

Si A est la **matrice** représentative de f dans une **base** donnée de E (dim E = n), on a $A \in M_n(\mathbf{C})$ et l'on définit le **spectre** de la matrice A de façon analogue à celui de f (on identifie ici le spectre avec l'ensemble des valeurs propres de A) (cf **valeur propre**, **vecteur propre**). On note alors :

(5) $\quad Sp_{\mathbf{C}}\, A$ ou $Sp\, A = \{\lambda \in \mathbf{C} : |A - \lambda . I_n| = 0\}$.