

STATISTIQUE ANCILLAIRE (G1, G2, D1)

(23 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

L'expression de **statistique ancillaire**, tirée de la terminologie anglo-saxonne (« *ancillary statistic* »), désigne une **statistique libre**.

On en présente ici un aspect complémentaire.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle statistique** dans lequel $\Theta = \Theta' \times \Theta''$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ et $(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$ deux **espaces probabilisables** auxiliaires tq $\mathcal{Y} \subset \Theta'$ et $\mathcal{Z} \subset \Theta''$. Etant donné deux **applications mesurables** (ou « statistiques ») $s : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ et $t : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Z}$, on définit les deux **statistiques** suivantes :

$$\begin{aligned} S &= s(X), \\ (1) \quad T &= t(X). \end{aligned}$$

On note $\theta = (\theta', \theta'')$, $P_{(\theta', \theta'')}^{(S, T)}$ ou $P_\theta^{(S, T)}$ la **lp** du couple (S, T) , $P_{(\theta', \theta'')}^S$ celle de S et $P_{(\theta', \theta'')}^T$ celle de T .

(ii) Sous les hypothèses du **critère de factorisation**, la **fonction de vraisemblance** L associée à $P_{(\theta', \theta'')}^{(S, T)}$ se décompose selon :

$$(2) \quad L(x, (\theta', \theta'')) = (dP_\theta^{(S, T)} / d\mu(x)) = h(x) \cdot g\{(s(x), t(x)), (\theta', \theta'')\},$$

où μ est une **mesure abstraite** positive σ -finie définie sur $\mathcal{B}$.

On dit alors (R.A. FISHER) que T est une **statistique ancillaire** (pr au **paramètre principal** θ') ssi la loi P_θ^T de T ne dépend pas de $\theta' \in \Theta'$.

(iii) Si T est ancillaire, (2) peut s'écrire sous la forme :

$$(3) \quad L(x, (\theta', \theta'')) = h(x) \cdot g^{t(x)}\{s(x), (\theta', \theta'')\} \cdot g_a\{t(x), \theta''\}.$$

Cette décomposition de L est à l'origine du **principe de conditionnalité de R.A. FISHER** : si T est ancillaire, l'inférence sur le paramètre principal θ' ne nécessite que la connaissance de la **loi conditionnelle** de S sachant T , ie la connaissance de $g^{t(x)}$.