STATISTIQUE ÉQUIVARIANTE (G1)
(01 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **statistique équivariante** est un exemple de **statistique invariante** par transformation affine (cf **application affine**).

(i) Soit $(\mathcal{X}_0, \mathcal{B}_0)$ un **groupe algébrique** additif (**groupe mesurable**), $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathcal{X}_0^N, \mathcal{B}_0^{\otimes N})$ l'espace puissance associé, et $s : \mathcal{X}_0^N \mapsto \mathcal{X}_0$ une **statistique**, ie ici une application $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0)$-mesurable.

On dit que s est une **statistique équivariante** ssi :

(1) $\quad s(X_1 + h, ..., X_N + h) = s(X_1, ..., X_N) + h, \qquad \forall h \in \mathcal{X}_0$.

On note eg $\mathcal{E}(\mathcal{X}_0)$, ou simplement $\mathcal{E}$, la classe des statistiques équivariantes.

En notant $X = (X_1, .., X_N)$ et $X + h\, e_N = (X_1 + h, ..., X_N + h)$, on obtient :

(1)' $\quad s(X + h\, e_N) = s(X) + h, \qquad \forall h \in \mathcal{X}_0$.

(ii) Plus généralement, si $\mathcal{X} = \mathbf{R}^N$ et si $\mathcal{G}$ est le **groupe des transformations** affines sur $\mathbf{R}^N$, on dit que s est une **statistique équivariante** (ie invariante pour $\mathcal{G}$) ssi, pour tout $x \in \mathbf{R}^N$:

(1)" $\quad s(\gamma . x + h) = \gamma . s(x) + h, \qquad \forall \gamma \in \mathbf{R}$ et $\forall h \in \mathbf{R}^N$.

(iii) Toute statistique $s \in \mathcal{E}$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) le remplacement de h par $- X_n$ dans (1) conduit à :

(2) $\quad s(X) = X_n + t_n(X_1 - X_n, ..., X_{n-1} - X_n, X_{n+1} - X_n, ..., X_N - X_n), \quad \forall n = 1, ..., N,$

où l'on a posé :

(3)
$$D\, X_{\alpha n} = X_\alpha - X_n, \quad \forall \alpha \in N_N^* \setminus \{n\}, \qquad \text{(cf \textbf{différence finie})},$$
$$t_n(D_{1n}, ..., D_{n-1,n}, D_{n+1,n}, ..., D_{Nn}) = s(D_{1n}, ..., D_{n-1,n}, 0, D_{n+1,n}, ..., D_{Nn}),$$

avec $t_n : \mathcal{X}_0^{N-1} \mapsto \mathcal{X}_0$;

(b) si $\mathscr{X}_0$ = **R** et si $\lambda = (\lambda_1 ,..., \lambda_N)$ est une **suite** réelle finie sommant à l'unité ($\Sigma_{n=1}^N \lambda_n = 1$), la multiplication des équations (2) par λ_n et la sommation des équations obtenues sur n conduisent à la **forme générale** d'une statistique équivariante :

(4) $s(X) = \Sigma_{n=1}^N \lambda_n . X_n + \Sigma_{n=1}^N t_n (D_n)$,

où t_n est l'application mesurable définie en (3) et $D_n = (D_{1n} ,..., D_{n-1,n} , D_{n+1,n} ,..., D_{Nn})$.

(iv) La notion intervient notamment en **théorie de l'estimation**, eg avec l'**estimateur de PITMAN** (cf **équivariance**, **risque de PITMAN**).