STATISTIQUES DE FISHER (G5, F1, F3, G1)
(11 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** $P^{\xi} = \xi\,(P)$. On note $X = (X_1 ,..., X_N)$ un **échantillon iid**, constitué de **copies** indépendantes et équidistribuées selon P^{ξ}, et soit $(K_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$ la suite des **cumulants** de P^{ξ}.

On appelle alors **statistique d'ordre $j \in \mathbf{N}^*$ de R.A. FISHER**, ou **k-statistiques d'ordre $j \in \mathbf{N}^*$ de R.A. FISHER**, la **statistique** réelle scalaire $k_j : \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}$ définie par les deux conditions suivantes :

(a) $E\, k_j\, (X_1 ,..., X_N)$ ou $E\, k_j\, (X) = K_j$ (**estimateur sans biais**) ;

(b) $k_j\, (X_{\sigma(1)} ,..., X_{\sigma(N)}) = k_j\, (X_1 ,..., X_N)$, pour toute **permutation** $\sigma \in \boldsymbol{\sigma}_N$ (fonction symétrique des coordonnées de X), ce qui se note aussi symboliquement $k_j\, (\sigma\, (X)) = k_j\, (X)$.

Si les conditions précédentes sont vérifiées pour tout $j \in \mathbf{N}$, on dit que la **suite** $(k_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$ est la **suite des statistiques de R.A. FISHER**, ou **suite des k-statistiques de R.A. FISHER**.

(ii) Lorsque $j \leq N$, la définition des cumulants et la définition {(a),(b)} permettent d'expliciter les k-statistiques k_j ($j \in \mathbf{N}^*$).

Ainsi, lorsque j = 1, on obtient : $k_1\, (X) = \overline{X}_N = N^{-1} . \Sigma_{n=1}^{N} X_n$ (**moyenne empirique**).

(iii) On établit les propriétés élémentaires suivantes :

(a) pour tout $j > 1$, on a (**invariance** par translation) :

(1) $k_j\, (X + h . e_N) = k_j\, (X), \quad \forall\, h \in \mathbf{R},$

où l'on note $X + h . e_N = (X_1 + h ,..., X_N + h)$ et où $e_N = (1 ,..., 1)' \in \mathbf{R}^N$;

(b) pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on a (homogénéité de degré j) :

(2) $k_j\, (\lambda . X) = \lambda^j . k_j\, (X), \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{R},$

où l'on note $\lambda . X = (\lambda . X_1 ,..., \lambda . X_N)$.

(iv) Si ξ est un **vecteur aléatoire**, on peut définir, de manière analogue, les **statistiques de R.A. FISHER** correspondantes.