

STRUCTURE (A15, N8)

(09 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) La notion de **structure** peut faire référence à la notion de **système**, ie d'ensemble composé d'éléments (ou « composants ») fonctionnels (ie chaque élément remplit une ou plusieurs fonctions identifiées), éléments reliés entre eux par diverses relations : « influences », (inter)actions (« flux »).

Une structure est souvent interprétable en termes de **théorie des graphes** : en effet, elle peut être représentée par un **graphe** ou par un **réseau**, ce qui permet de la décrire et d'en analyser les propriétés alors dites « structurelles ».

Cependant, à la différence d'un système, une structure fait plutôt référence à un « objet » de type descriptif, et non pas normatif. Si l'on peut se contenter d'observer et de décrire une structure, un système se voit souvent attribuer une finalité ou un objectif. Autrement dit, une structure est a priori une notion statique, tandis qu'un système relève d'une approche dynamique doublée de considérations d'**optimalité** : un système est orienté vers un but, et doit donc être optimisé pour remplir des objectifs.

Une structure peut posséder des défauts internes : **conception** défailante (incohérences logiques, etc), **composants** défectueux (pannes : cf **taux d'échec**). Dans certains cas, ces défauts peuvent être à l'origine d'une **catastrophe** (eg accident, etc).

(ii) En algèbre, tout ensemble peut être muni d'une (ou plusieurs) opérations entre ses éléments :

(a) on appelle **loi (de composition) interne**, ou simplement **opération interne**, dans un ensemble E toute application $i : E \times E \mapsto E$.

Si $(x, y) \in E$, l'image $i(x, y) \in E$ est souvent notée selon $x * y$, ou encore $x \circ y$, ou $x \times y$, ou $x \cdot y$, etc. La **loi**, ou **opération**, i peut posséder un certain nombre de propriétés classiques : associativité, commutativité, existence d'éléments neutres, existence de symétriques, idem (ou nil) potence, etc.

Un ensemble S muni d'une loi i (donc d'une opération $*$ associée à i) est souvent notée (E, i) ou $(E, *)$. Ainsi, si $E = \mathbf{N}$ et $*$ = +, on note $(\mathbf{N}, +)$.

Un ensemble E peut posséder plusieurs (en général, un nombre fini de) lois internes i' , i'' , etc. On le note alors $(E, i', i'', \dots)$ ou $(E, ', ', \dots)$. Ainsi, un corps peut se noter $(\mathbf{K}, +, \cdot)$;

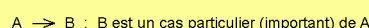
(b) étant donné un ensemble E et un ensemble **K**, on appelle **loi (de composition) externe**, ou encore **opération externe**, sur E toute application $e : \mathbf{K} \times E \mapsto E$. Si $(\lambda, x) \in (\mathbf{K}, E)$, l'image $e(\lambda, x) \in E$ peut aussi être notée $\lambda \cdot x$, ou encore $\lambda * x$, etc.

Comme précédemment, une opération externe e peut posséder diverses propriétés classiques. De plus, si E est muni de lois internes $i', i'', \dots$, et de lois externes $e', e'', \dots$, ces lois peuvent entretenir aussi des relations (notamment, de compatibilité) entre elles : eg la **distributivité** des lois externes par rapport aux lois internes ;

Par exemple, la notation $(\mathbf{A}, E)$ d'un module résume implicitement la notation complète $((\mathbf{A}, +, \cdot), (E, +), \cdot)$: deux lois internes pour $\mathbf{A}$, une loi interne pour E et une loi externe (homothétie).

(iii) Les diverses structures précédentes peuvent aussi se combiner, ce qui implique une **compatibilité entre structures**. Ainsi, on peut combiner :

(a) une structure algébrique avec une structure topologique : eg pour définir un groupe topologique, un corps topologique ou un **espace vectoriel topologique** (cf schéma ci-après) ;



(b) une structure algébrique avec une structure mesurable : eg pour définir un **groupe mesurable**, un corps mesurable ou un **espace vectoriel mesurable**.

Par ailleurs, on peut construire une structure mesurable à partir d'une structure topologique (cf **borélien**) ou inversement.

(iii) En Statistique, une **structure statistique** est aussi appelée **modèle statistique** ou parfois **représentation statistique**. Elle permet de décrire ou de caractériser les **variables aléatoires** ou les **statistiques** d'intérêt mises en oeuvre : **caractéristiques légales**, **caractéristiques conditionnelles**, etc.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ est un modèle statistique, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace mesurable** (**espace d'observation** ou **espace d'échantillonnage**) et $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **variable aléatoire** donnée, l'ensemble $\mathcal{X}$ possède souvent une structure particulière $\mathcal{S}$, supposée être adéquate pour les besoins de l'analyse statistique.

Ainsi, $\mathcal{X}$ peut être un **espace vectoriel** (eg $\mathbf{R}^K$), un espace de matrices (eg $M_{NK}(\mathbf{R})$), un ensemble de **graphes** (au sens de la **théorie des graphes**) ou de **réseaux** (au sens de la théorie de la **fiabilité** des systèmes), un ensemble de fonctions (espace fonctionnel), un ensemble de figures géométriques (variétés topologiques ou **variétés différentielles**), un ensemble de fréquences (notes musicales, etc), etc. On dit alors, respectivement, que ξ est un **vecteur aléatoire**, un **graphe aléatoire** ou un **réseau aléatoire**, une **fonction aléatoire** ou une **fonctionnelle aléatoire**, une **variété stochastique**, une fréquence aléatoire, etc.

Par suite, si $\omega \in \Omega$ représente une **unité statistique**, on observe sur elle une « valeur » $\xi(\omega)$ dans $\mathcal{X}$. Cette valeur peut, d'un point de vue concret, s'interpréter dans des contextes très divers :

(a) physique : $\xi(\omega)$ peut représenter un ensemble de K **mesures** numériques effectuées sur ω (positions relatives entre étoiles, variables météorologiques, etc) ;

(b) biologie : $\xi(\omega)$ peut être la représentation, plus ou moins simplifiée, d'un système sanguin, d'un système nerveux ou d'un système immunitaire, etc (médecine), ou encore un réseau de diffusion géographique d'une pathologie (épidémiologie) ;

(c) écologie : $\xi(\omega)$ peut représenter un ensemble de K observations effectuées à N instants différents sur ω (membre d'une faune ou d'une flore) ;

(d) psychologie : $\xi(\omega)$ peut s'interpréter comme eg une « trajectoire » suivie par un individu ω au cours du temps, ie ses réponses à une batterie de tests effectués à des instants différents : système éducatif, sélection des aptitudes ; ou bien des observations relative à divers « descripteurs » de son parcours professionnel, etc ;

(e) sociologie (économie) : $\xi(\omega)$ peut représenter une variété associée à un agent économique (fonction d'utilité et sa surface, fonction de production et la variété qu'elle décrit, etc).

Par suite, diverses **représentations** de la **Statistique descriptive** (eg **histogramme** ou **tableau statistique**) peuvent être interprétées comme des variables aléatoires ou des statistiques définies sur un ensemble ad hoc et à valeurs dans des ensembles munis de structures variées (cf aussi **variable aléatoire**, **probabilité géométrique**, **disposition**, **variable morphologique**).

(iv) On rencontre aussi la notion de **structure** dans le cadre spécifique des structures latentes (cf **structure latente**, **modèle de structures latentes**, **modèle des classes latentes**, **variable latente**).

(v) Si l'on considère qu'une **structure** S est un **ensemble** d'éléments s_a ou s_b reliés, ou non, entre eux : $s_b = f_{ab}(s_a)$, $\forall (s_a, s_b)$, cette définition conduit naturellement à associer une structure à un **graphe** ou à un **réseau**, et inversement.

On peut alors associer une **forme** F , ie une **variable morphologique**, à une structure S . A titre d'exemples :

(a) (mathématique). La **famille** des quadriques peut s'exprimer, en coordonnées cartésiennes, selon l'équation implicite suivante :

$$(1) \quad a x^2 + b y^2 + c z^2 + d x y + e y z + f z x + g x + h y + i z + j = 0,$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

C'est une famille de formes simples. La structure associée à chacune d'elles est une « forme géométrique » (eg paraboloïde, hyperboloïde, etc) dont le type (ou la catégorie) dépend des valeurs du paramètre vectoriel $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$ dans $\mathbf{R}^{10}$. Ainsi, lorsque $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j) \in P_4 \subset \mathbf{R}^{10}$ (resp $H_4 \subset \mathbf{R}^{10}$, etc), on obtient la famille des paraboloïdes (resp des hyperboloïdes, etc), avec $P_4 \cup H_4 \cup \text{etc} = \mathbf{R}^{10}$;

(b) (sociologie). La structure économique d'un pays peut se représenter à travers sa comptabilité nationale (eg de flux) qui, elle-même, peut se résumer en une équation matricielle :

$$(2) \quad A x = b,$$

dans laquelle :

(b)₁ x est le vecteur des postes comptables (éventuellement signés) ;

(b)₂ A est la « matrice de structure » du système comptable, constituée des éléments $\{-1, 0, +1\}$;

(b)₃ b est un vecteur second membre constant (généralement, $b = 0$).

Par suite, si la matrice A leur est commune (normalisation comptable internationale), une classification statistique des vecteurs x de divers pays permet d'établir des « formes » d'économies concrètes. Une amélioration de l'analyse serait la disponibilité d'échanges croisés entre pays (flux réels, flux monétaires ou flux financiers) : elles

conduirait à une classification à partir de l'hyper-matrice dont les blocs diagonaux seraient des matrices nationales du type précédent, et les blocs croisés seraient les matrices d'échanges.