SUITE BORNÉE EN PROBABILITÉ (E)
(02 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **vars** $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}$.

On dit que $(X_n / a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une **suite bornée en probabilité** ssi il existe une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ (suite d'éléments positifs) tq :

(1)
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha(\varepsilon) > 0$ et un entier $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tq :

$$n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad P([a_n^{-1} . |X_n| > \alpha(\varepsilon)]) < \varepsilon.$$

On note alors $X_n = O_p(a_n)$ ou $O_P(a_n)$ (notation « **grand zéro en probabilité** » ou « **grand zéro probabiliste** »), ou encore $X = O_p(a)$ ou $O_P(a)$ (cf **ordres de convergence en probabilité**, **suite négligeable en probabilité**).

(ii) La notion se généralise directement aux cas dans lesquels :

(a) X prend ses valeurs dans un **espace métrique** (E, d) : on remplace alors $|X_n|$ par $d(X_n, X_\infty)$, où $X_\infty \in E$ est un élément donné ;

(b) X prend ses valeurs dans un **espace normé** $(E, || . ||)$: on remplace alors $|X_n|$ par $||X_n||$.

Elle s'étend aussi au cas d'une **famille** de va, lorsque l'ensemble des indices est métrique, eg lorsque $X = (X_t)_{t \in T}$ est un **processus stochastique** et que (T, δ) est un **espace métrique**.