SUITE DE LOIS CONTIGUES (E4)

(i) Soit $((\Omega_n , \mathcal{T}_n))_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** d'**espaces probabilisables** de base. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\mathcal{Q}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux familles de **mesures de probabilité**, dont chaque mesure générique P_n (resp Q_n) est définie sur $\mathcal{T}_n$.

Pour toute famille $R = (R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de **mesures** R_n resp définies sur $\mathcal{T}_n$, on appelle :

(a) **suite d'événements asymptotiquement négligeable** pour R une suite $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (où $A_n \in \mathcal{T}_n$, $\forall$ $n \in \mathbf{N}$) tq (cf **suite négligeable en probabilité**) :

(1) $\lim_n R_n (A_n) = 0$;

(b) **suite de probabilités contigüe** à une suite donnée $P = (P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (avec $P_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$) une suite $Q = (Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (avec $Q_n \in \mathcal{Q}_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$) tq toute suite d'événements asymptotiquement négligeable pour P est asymptotiquement négligeable pour Q. Autrement dit, pour toute suite d'événements $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (où $A_n \in \mathcal{T}_n$, $\forall$ $n \in \mathbf{N}$), on a :

(2) $\lim_n P_n (A_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n Q_n (A_n) = 0.$

On note $Q \gamma P$ ou Q c P, ou encore $Q \| P$ (etc) pour exprimer que Q est contigüe à P.

Si $Q \gamma P$, on n'a pas nécessairement $P \gamma Q$ (en raison de la dissymétrie de la définition (1)). Si, à la fois, $Q \gamma P$ et $P \gamma Q$, les suites P et Q sont appelées **suites contigües entre elles**, ou **suites mutuellement contigües**. On note eg $P \approx Q$.

(ii) La notion de contiguïté (2) précédente s'étend directement à une **suite de lois de probabilité contigüe**. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $(\mathcal{X}_n , \mathcal{B}_n)$ un **espace mesurable** et $X_n : \Omega_n \mapsto \mathcal{X}_n$ une **application mesurable** (**va** ou **statistique**). On note $P_n^{X(n)}$ (resp $Q_n^{X(n)}$) les lois suivies par les variables X_n , ie les images $P_n^{X(n)} = X_n (P_n)$ des mesures P_n (resp les images $Q_n^{X(n)} = X_n (Q_n)$ des mesures Q_n) par X_n (en notant $X(n)$ pour désigner X_n , $\forall$ $n \in \mathbf{N}$).

On dit que la suite des lois $Q_n^{X(n)}$ est une **suite de lois contigüe** à la suite des lois P_n^{Xn} ssi, en tant que suites de mesures de probabilité, la première suite est contigüe à la seconde.

Autrement dit, pour toute suite d'événements $B = (B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tq $B_n \in \mathcal{B}_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a la définition équivalente à (2) suivante :

(3) $\lim_n P_n^{X(n)} (B_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n Q_n^{X(n)} (B_n) = 0.$

(iii) Enfin, étant donné une suite $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mesures μ_n resp définies sur $\mathscr{B}_n$ (cf **mesure abstraite**), on suppose que les lois de probabilités $P_n^{X(n)}$ et $Q_n^{X(n)}$ sont absolument continues par rapport aux mesures μ_n (cf **loi absolument continue**, **famille de lois dominée**), et l'on note resp $g = (g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite des **densités** (**dérivées de NIKODYM-RADON**) définies par $g_n = dQ_n^{X(n)} / d\mu_n$ et $h = (h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite des densités définies par $h_n = dP_n^{X(n)} / d\mu_n$.

On dit alors que g est une **suite de densités contigüe** à h ssi la suite des lois $(Q_n^{X(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ est contigüe à la suite $(P_n^{X(n)})_{n \in \mathbf{N}}$.