**SUPPORT (D'UNE MESURE) (A5)**
(11 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit (E, $\mathcal{O}$) un **espace topologique**, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{O})$ sa **tribu borélienne** et $\mu$ une **mesure positive** (**mesure abstraite**) sur $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{V}_x$ la famille des **voisinages** $V_x$ de tout élément $x \in E$.

On appelle **support** de $\mu$ l'ensemble fermé Supp $\mu$ défini comme l'ensemble des points $x \in E$ tq tout voisinage $V_x$ de x a une mesure strictement positive (cf **mesure positive**) :

(1) $\quad \text{Supp } \mu = \{x \in E : V_x \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \mu(V_x) > 0)$.

(ii) Soit (E, $\mathcal{O}$) un **espace localement compact** et $\mu$ une **mesure de RADON** positive sur E.

On appelle **support** de $\mu$ le complémentaire du plus grand des **ouverts** $U \in \mathcal{O}$ tels que $\mu(U) = 0$, ie :

(2) $\quad \text{Supp } \mu = U_{\#}^{c}$ ,

où l'on note $U_{\#} \in \mathcal{O}$ le plus grand ouvert tq $\mu(U_{\#}) = 0$, ie : $\forall V \in \mathcal{O},\ \mu(V) = 0 \Rightarrow V \subset U_{\#}$ .

Si $\mu$ est de signe quelconque, on appelle **support** de $\mu$ le complémentaire du plus grand des ouverts $U \in \mathcal{O}$ tq $|\mu|(U) = 0$, où $|\mu| = \mu^+ - \mu^-$, $\mu^+ = \sup(\mu, 0)$ et $\mu^- = \sup(-\mu, 0)$ désignant les parties positive et négative de $\mu$ (cf **partie positive**).

(iii) Soit (E, $\mathcal{O}$) un espace localement compact, $\mu$ une mesure de RADON (signée) sur E et $\mathcal{F}$ la famille des fermés de (E, $\mathcal{O}$).

On dit que $\mu$ est une **mesure portée** par le fermé $F \in \mathcal{F}$ ssi :

(3) $\quad \text{Supp } \mu \subset F \quad \text{et} \quad |\mu|(F^c) = 0$.

(iv) Le support d'une mesure vérifie diverses propriétés.

Ainsi, $\mu$ et $\nu$ étant deux **mesures positives** finies sur la tribu naturelle $\mathcal{B}_E$ de $E = \mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{Z}^n$) (cf **mesure finie**), on établit que (fermeture de la **somme vectorielle** des supports, lorsque $E = \mathbf{R}^n$) :

(3) $\quad \text{Supp } (\mu * \nu) = \text{adh } (\text{Supp } \mu + \text{Supp } \nu)$.

où $*$ désigne le **produit de convolution** des mesures.