SYSTÈME LINÉAIRE (A3)
(10 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **système linéaire**, ou **système d'équations linéaires**, ou encore simplement **équation linéaire**, intervient souvent :

(a) en mathématique. En calcul numérique : approximations des fonctions ou des systèmes non linéaires, **équation différentielle** ou **équation intégrale** (stochastiques ou non). Dans la théorie des équations : résolution des systèmes linéaires eux-mêmes ;

(b) en **Statistique** : **équation estimante** (eg **modèle de régression**, **maximum de vraisemblance**), **analyse des données** (dans ses aspects algébriques), etc.

(i) Soit E et F deux **espaces vectoriel** sur un corps commutatif **K**, f $\in$ Hom (E, F) une **application linéaire** et b $\in$ F un vecteur donné.

On appelle **système linéaire**, ou **système d'équations linéaires**, ou simplement **équation linéaire**, une équation de la forme :

(1) $f(x) = b$,

dans laquelle le vecteur x est appelé l'**inconnue** du système.

L'étude de l'équation (1) revient à analyser les propriétés des éléments x $\in$ E qui la vérifient et notamment à exprimer, lorsque c'est possible, ces éléments x en fonction de f et de b.

Autrement dit, on analyse l'**ensemble des solutions**, ou **ensemble solution** :

(2) $S(f, b) = \{x \in E : f(x) = b\}$.

(ii) Le plus souvent, en pratique, E et F sont de dimensions finies (dim E = n et dim F = m) et rapportés à des **bases** respectives. On note alors A $\in$ M_{mn} (**K**) la **matrice** représentative de f dans ces bases, et l'on note encore b la matrice représentative du vecteur (colonne) b de F et x celle représentative, du vecteur (colonne) x de E.

Par suite, on appelle **système linéaire**, ou **système d'équations linéaires**, ou simplement **équation linéaire**, constitué de m équations et de n inconnues, une équation de la forme :

(1)' $A x = b$,

dans laquelle on a ainsi identifié x $\in$ E (resp b $\in$ F) au vecteur colonne x $\in$ $\mathbf{K}^n$ (resp b $\in$ $\mathbf{K}^m$) constitué de ses coordonnées dans la base de E (resp de F).

(iii) Les principaux problèmes à traiter sont alors les suivants :

(a) **existence des solutions** de (1)'. Si l'on note :

(2)' $S(A, b) = \{x \in \mathbf{K}^n : A x = b\}$

l'ensemble des solutions de (1)', on cherche si $S(A, b) \neq \varnothing$;

(b) **solutions exactes** de (1)'. Lorsque $S(A, b) \neq \varnothing$, on recherche le nombre card $S(A, b)$ des solutions du système (1)' ainsi que l'élément générique $x \in S(A, b)$, puisque de (1)' est un **système linéaire** « **compatible** » ;

(c) **solutions approchées**. Lorsque $S(A, b) = \varnothing$, le système (1)′ est un **système** « **incompatible »** (ou « **système impossible »**), puisque $S(A, b) = \varnothing$ (il n'existe pas de vecteur x tel que $A x - b = 0$). On se borne alors à chercher des vecteurs $x \in \mathbf{K}^n$ tels que le **vecteur d'excès**, ou **vecteur d'écart** (cf **variable d'écart**) :

(3) $e(x) = A x - b$

soit le plus « proche » possible du vecteur nul. Ceci suppose que les espaces vectoriels considérés, soient des **espaces normés**.

La théorie des **inverses** généralisées joue ici un rôle important (cf **inverse**) : selon le cas, on peut caractériser le système (1)' à l'aide de **matrices inverses généralisées**, ou de **matrice pseudo-inverse**, etc (cf aussi **solution des moindres carrés**, **solution minimax**).

(iv) Les **résultats de base** sont les suivants. A étant une matrice donnée, on note $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble de ses inverses conditionnelles, $\mathscr{G}(A)$ celui de ses inverses généralisées, $\mathscr{M}(A)$ celui de ses inverses des moindres carrés.

(a) **existence des solutions**.

(a_1) $S(A, b) \neq \varnothing$ (système compatible) $\Leftrightarrow A A^- b = b$, où A^- est une **matrice inverse généralisée** (ou g-inverse) de A ;

(a_2) si $S(A, b) \neq \varnothing$, l'élément générique x de $S(A, b)$ est de la forme :

(4) $x = A^- b + (I_n - A^- A) h, \quad \forall h \in \mathbf{K}^n.$

Inversement, pour tout $s \in S(A, b)$, il existe un vecteur $h \in \mathbf{K}^n$ tel que $s = A^- b + (I_n - A^- A) h$. La propriété est encore vraie avec une **matrice inverse conditionnelle** A^c de A (au lieu d'une g-inverse telle que A^-). Un cas particulier important est celui où $h = 0$;

(a_3) si $m = n$ et $A \in R_n(\mathbf{K})$ (**matrice régulière**), alors $S(A, b) \neq \varnothing$;

(a_4) $S(A, b) \neq \varnothing \Leftrightarrow \text{rg}\,[A, b] = \text{rg}\,A$;

(a_5) $S(A, b) \neq \varnothing \Leftrightarrow b \in \text{Im}\,A$;

(a_6) $S(A, b) \neq \varnothing \Leftrightarrow A^c \in \mathscr{C}(A)$ est telle que $A A^c b = b$;

(a_7) $S\ (A, b) \neq \varnothing \Leftrightarrow A^- \in \mathscr{G}(A)$ est telle que $A\ A^-\ b = b$;

(a_8) si $A \in M_{mn}$ (**K**) et rg A = m, alors $S\ (A, b) \neq \varnothing$;

(a_9) si $A \in M_{mn}$ (**K**) et b = 0, alors :

(5) $\quad S\ (A, 0) \setminus \{0\} \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; \text{rg } A < n$;

(b) **propriétés cardinales**.

Elles concernent l'ensemble S (A, b) des solutions de (1)' :

(b_1) si $S\ (A, b) \neq \varnothing$, alors la solution $x = A^-\ b$ est unique ssi $A^-\ A = I_n$;

(b_2) si $A \in M_{mn}$ (**K**) et $S\ (A, b) \neq \varnothing$, alors, card S (A, b) = 1 ssi rg A = n ;

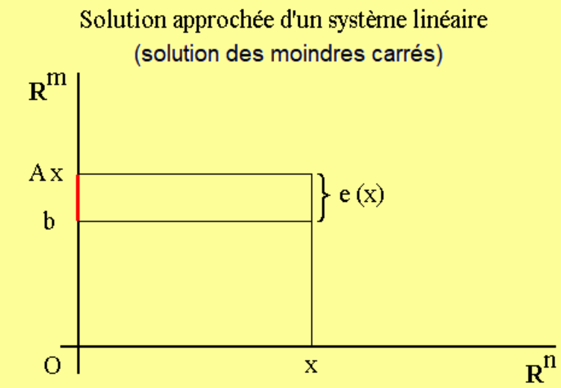
(b_3) si card S (A, b) = 1, alors $S\ (A, b) = A^-\ b$ et $A^-\ b = A^c\ b$, pour toute inverse conditionnelle $A^c \in \mathscr{C}(A)$;

(b_4) si $A \in M_{mn}$ (**K**), avec $\text{rg } A = r \neq 0$, et si $b \neq 0$, alors rg S (A, b) = n - r + 1 ;

(b_5) si $A \in M$ (**K**), avec $\text{rg } A = r \neq 0$, et si b = 0, alors $S\ (A, b) \lhd$ $\mathbf{K}^n$ (sous espace vectoriel) et rg S (A, b) = n - r ;

(c) **solutions approchées**.

Lorsque $S\ (A, b) = \varnothing$, on ne peut définir que des « solutions approchées » :



(c_1) si **K** = **R**, la meilleure approximation, ou **solution epsilon-approchée** (ou **solution ε-approchée**), du système (1)' est :

(6) $\quad x_\varepsilon \;=\; A^-\ b.$

De plus, elle est unique (cf **solution des moindres carrés**) ;

(c_2) soit $A \in M_{mn}$ (E) et $b \in \mathbf{R}^m$. Alors (en notant **R**n pour $\mathbf{R}^n$) :

(7) $\min_{x \in \mathbf{R}n} (A x - b)' (A x - b) = b' (I_m - A A^-) b$;

(c_3) pour toute **matrice inverse des moindres carrés** $A^l \in \mathscr{M}(A)$ de A, le vecteur $x^\wedge = A^l b$ est solution des moindres carrés ordinaires du système (1)'. Par définition, le vecteur $x^\wedge = A^- b$ est solution des moindres carrés ordinaires, mais le vecteur $x^{\cdot\cdot} = A^c b$ (où A^c est une inverse conditionnelle de A) n'est pas nécessairement solution des moindres carrés ordinaires (sauf si $A A^c \in S_m (\mathbf{R})$) ;

(c_4) si $A \in M_{mn} (\mathbf{K})$ et si $A^l \in \mathscr{M}(A)$, alors $A A^l = A A^-$;

(c_5) $x^\wedge \in \mathbf{R}^n$ est solution des moindres carrés ordinaires de (1)' ssi l'une quelconque des conditions suivantes est vérifiée :

$(A x^\wedge - b)' (A x^\wedge - b) = b' (I_m - A A^-) b$;

$A x^\wedge = A A^- b$;

$A' A x^\wedge = A' b$ (« **équations normales** » du système (1)') ;

$A x^\wedge = A A^l b$, pour toute $A^l \in \mathscr{M}(A)$;

$A^- A x^\wedge = A^- b$;

(c_6) si $A^l \in \mathscr{M}(A)$, la solution des moindres carrés $x^\wedge$ s'écrit :

(8) $x^\wedge = A^l b + (I_n - A^l A) h, \quad \forall h \in \mathbf{K}^n$.

Inversement, il existe un $h \in \mathbf{K}^n$ tq toute solution des moindres carrés du système (1)' s'écrit sous la forme précédente ;

(c_7) soit $A \in M_{mn} (\mathbf{K})$ et $(A' A)^c \in \mathscr{C}(A' A)$. Alors $B = (A' A)^c A' \in \mathscr{M}(A)$;

(c_8) soit $A^l \in \mathscr{M}(A)$. Alors, $A A^l = A A^- \in S_m (\mathbf{K}) \cap I_m (\mathbf{K})$ (cf **matrice symétrique**, **matrice idempotente**) ;

(c_9) $S (A, b) \neq \varnothing \Leftrightarrow A A^l b = b$;

(c_{10}) soit $A \in M_{mn} (\mathbf{K})$ et $A^c \in \mathscr{C}(A)$. Etant donné une suite $h = (h_i)_{i=1,\dots,k}$ d'éléments $h_i \in \mathbf{K}^n$ et une suite $\alpha = (\alpha_i)_{i=1,\dots,k}$ d'éléments $\alpha_i \in \mathbf{K}$, l'hypothèse $S (A, b) \neq \varnothing$ implique :

(9) $y = A^c b + \Sigma_{i=1}^k \alpha_i (I_n - A^c A) h_i \in S (A, b)$;

(c_{11}) si $x = (x_i)_{i=1,\dots,k}$ est une suite de solutions du système (1)', toute **combinaison linéaire convexe** des termes de x est aussi solution de (1)', ie :

(10) $x_i \in S\,(A, b)$, $\forall\, i \in N_K^*$ $\Rightarrow$ $\Sigma_{i=1}^{k}\, \alpha_i\, x_i \in S\,(A, b)$,

pour tout $\alpha = (\alpha_1 ,\ldots, \alpha_k)' \in \mathbf{R}^n$ tq $e'\,\alpha = 1$ et $\alpha_i \geq 0$, $\forall\, i \in N_k^*$, (la positivité des α_i n'est d'ailleurs pas nécessaire) ;

(c_{12}) soit $A \in M_{mn}$ (**K**). Si $A^c \in \mathcal{C}(A)$ vérifie $A\, A^c = I_m$, alors $A\, A^- = I_m$. De même, si $A^- \in \mathcal{G}(A)$ vérifie $A\, A^- = I_m$, alors $A\, A^c = I_m$ pour toute $A^c \in \mathcal{C}(A)$;

(c_{13}) soit $\ddot{x} = A^- b$ une solution de (1)'. Alors, $y = \ddot{x} + z$ est aussi solution de (1)', $\forall\, z \in (\mathrm{Im}\, A')^{\perp}$ (supplément orthogonal de Im A') ;

(c_{14}) l'analogue de la propriété (13) précédente vaut pour les inverses des moindres carrés de A. En effet, étant donné $A \in M_{mn}$ (**K**), si $A \in \mathcal{M}(A)$ vérifie $A\, A^l = I_m$, alors $A\, A^- = I_m$. De même, si $A\, A^- = I_m$, alors $A\, A^l = I_m$, $\forall\, A^l \in \mathcal{M}(A)$;

(c_{15}) si $A \in R_n$ (**R**) (**matrice régulière**), alors $A^c = A^- = A^l = A^{-1}$ (**matrice inverse** ordinaire) ;

(c_{16}) soit $A \in M_{mn}$ (**K**) et $B = (A'\, A)^c\, A'$, où $(A'\, A)^c \in \mathcal{C}(A'\, A)$. Alors, $A\, B\, A = A$, $B\, A\, B = B$ et $A\, B \in S_m$ (**K**) (**matrice symétrique**) ;

(c_{17}) si $A \in S_n$ (**K**) (**matrice symétrique**) et $A^c \in \mathcal{C}(A)$, alors $(A^c)' \in \mathcal{C}(A)$. Par suite, $B = (1/2)\, \{A^c + (A^c)'\} \in S_n\,(\mathbf{K}) \cap \mathcal{C}(A)$, $\forall\, A^c \in \mathcal{C}(A)$.