

TAUX D'ÉCHEC (C5, F3, N8)

(09 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **taux d'échec** est une notion de base de la **théorie de la fiabilité des systèmes**, laquelle étudie notamment la **durée de vie** des éléments constituant un **système** (composé d'un ensemble d'**unités statistiques** : eg **unités expérimentales**). On peut présenter la notion de **taux d'échec** dans le cas discret, puis dans le cas absolument continu.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** (cf **espace fondamental**).

(i) Soit $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{N}$ une **variable** entière, de **loi** P^ξ . On note $f = dP^\xi / dv$ la **densité** de P^ξ par rapport à la **mesure de comptage** v sur $\mathcal{B}_{\mathbf{N}}$ et F la **fonction de répartition** associée à P^ξ .

On appelle alors **(fonction de) taux d'échec** de P^ξ à l'instant x la fonction associée à la **probabilité conditionnelle** suivante :

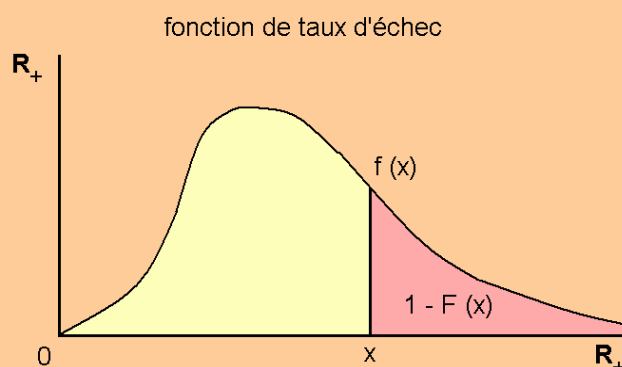
$$(1) \quad x \mapsto r(x) = P([\xi = x] / [\xi \geq x]), \quad \forall x \in \mathbf{N}.$$

Si ξ est une durée de vie, $r(x)$ s'interprète comme la **proportion** des éléments du système qui sont « morts » à l'instant $x \in \mathbf{N}$ parmi ceux qui ont vécu jusqu'à cet instant. En effet, on a, par définition, $[\xi = x] = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x\}$ et $[\xi \geq x] = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \geq x\}$, pour tout instant $x \in \mathbf{N}$.

Le **théorème des probabilités composées** permet d'expliciter le taux d'échec $r(x)$ selon :

$$(1)' \quad r(x) = \{1 - P([\xi \geq x]^c)\}^{-1} \cdot P([\xi = x]) = \{1 - F(x)\}^{-1} \cdot f(x).$$

Représentation graphique d'une fonction de taux d'échec



On établit alors les relations élémentaires :

$$P([\xi = x]) = r(x) \cdot \prod_{z=0}^{x-1} (1 - r(z)) ;$$

(2)

$$P([\xi \geq x]) = \prod_{z=0}^x (1 - r(z)).$$

(ii) Soit $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$ une **vars** positive de loi P^ξ . On note $f = dP^\xi / d\mu$ la densité de P^ξ par rapport à une **mesure positive** μ définie sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ (eg la restriction de la **mesure de LEBESGUE** λ à $\mathbf{R}_+$) et F la fr associée à P^ξ .

On appelle alors **taux d'échec** de P^ξ à l'instant x la fonction associée à la probabilité conditionnelle suivante :

$$(3) \quad x \mapsto r(x) = P([\xi = x] / [\xi \geq x]), \quad \forall x \in \mathbf{R}_+,$$

et qui s'explicite selon :

$$(3) \quad r(x) = \{1 - P(\xi \leq x)\}^{-1} \cdot (dP^\xi / d\mu)(x) = \{1 - F(x)\}^{-1} \cdot f(x), \quad \mu\text{-p.p.}$$

On peut aussi définir le **taux d'échec** selon :

$$(1) \quad r(x) = \frac{\{1 - F(x)\}^{-1} f(x) = \{P^\xi([\xi > x])\}^{-1} \cdot dP^\xi / d\mu,}{\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} P([x < \xi \leq x + h] / [\xi > x])}. \quad \mu\text{-p.p.}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, la **variable aléatoire** conditionnelle $\xi - x / \xi \geq x$ est appelée **durée de vie résiduelle** et son espérance mathématique définit la **fonction de durée de vie résiduelle** :

$$(4) \quad x \in \mathbf{R}_+ \mapsto E(\xi - x / \xi \geq x).$$

(iii) La fonction de taux d'échec possède les propriétés suivantes :

(a) si P^ξ est absolument continue par rapport à $\mu = \lambda / \mathbf{R}_+$ (restriction de la mesure de LEBESGUE à $\mathbf{R}_+$) et si F est différentiable (cf **différentiabilité**), alors :

$$(5) \quad r(x) = \frac{D\{1 / \text{Log}(1 - F(x))\},}{-D\{\text{Log}(1 - F(x))\}};$$

(b) sous les mêmes hypothèses, on a la **formule d'inversion** :

$$(6) \quad f(x) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(x) \cdot r(x) \cdot \exp(-x \cdot \bar{r}(x)),$$

où $\bar{r}(x) = x^{-1} \int_{[0,x]} r(z) dz$ (**taux d'échec moyen** entre 0 et x) ;

(c) P^ξ est une **loi exponentielle** ssi r est **constante**. Autrement dit, il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ tq $r(x) = c$ ($\forall x \in \mathbf{R}_+$), auquel cas on a :

$$(7) \quad 1 - F(x) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(x) \exp(-c \cdot x).$$

(iv) La fonction de taux d'échec est aussi appelée **fonction de taux de défaillance**, ou **fonction de taux de hasard**, ou **fonction de décès**, ou **fonction de mort**, ou **fonction de panne**, ou encore **fonction d'intensité**.

On la qualifie souvent de **conditionnelle**.

De même, la fonction de survie $\bar{F} = 1 - F$ est aussi appelée **fonction de fiabilité** ou **probabilité de survie**.

Enfin, une **fonction de taux d'échec croissante** est définie comme une fonction de taux d'échec r non décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

(v) L'estimation de r est souvent non paramétrique : elle est réalisée à partir d'un estimateur non paramétrique de la densité f (cf **estimateur de la densité**) ou de la fonction de répartition F (cf **estimateur de la fonction de répartition**).

(vi) Comme les unités considérées dans ce **contexte statistique** ne peuvent que « décéder » (panne, mort, etc), on se trouve généralement en présence de **censure**. L'estimateur de r peut alors se déduire d'estimateurs adaptés tq l'**estimateur de KAPLAN-MEIER**.