TEMPS D'ARRÊT (N)

(18 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **temps d'arrêt** précise les **phénomènes d'arrêt** d'un **processus stochastique** à des instants aléatoires.

(i) Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un **espace probabilisable**, $\overline{\mathbf{N}} = \mathrm{N} \cup \{+\infty\}$ et $\mathrm{T} \subset \overline{\mathbf{N}}$, (resp $\overline{\mathbf{R}} = \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ et $\mathrm{T} \subset \overline{\mathbf{R}}$) un **« intervalle »** quelconque, et $\overline{\mathrm{T}}$ = adh T son adhérence dans $\overline{\mathbf{N}}$ (resp dans $\overline{\mathbf{R}}$).

Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{T}_t)_{t \in T}$ une **filtration** sur (ou une **« base stochastique »** de) $\mathscr{T}$, ie une **famille** croissante de sous-**tribus** $\mathscr{T}_t$ de $\mathscr{T}$: autrement dit, $s < t \Rightarrow \mathscr{T}_s \subset \mathscr{T}_t$, où $\mathscr{T}_t$ est la tribu des événements antérieurs à la date t (cf **évènement postérieur**).

On dit que $A \in \mathscr{T}$ est un **événement « antérieur » à l'instant t** $\in$ T ssi $A \in \mathscr{T}_t$. On appelle alors **temps d'arrêt** (par rapport à $\mathscr{F}$, ou relatif à $\mathscr{F}$) une va $\tau : \Omega \mapsto \overline{\mathrm{T}}$ tq l'événement $[\tau \leq t]$ soit antérieur à l'instant t, ie :

(1) $\quad [\tau \leq t] = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathscr{T}_t, \qquad \forall\, t \in T.$

A titre d'exemple, τ est appelé **temps d'arrêt constant** ssi il existe une « **constante** » $t^* \in T$ tq $\tau = t^*$ (fonction constante, indépendante de ω).

(ii) Soit $X = \{(\Omega, \mathscr{T}, P), (\mathscr{X}, \mathscr{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un processus stochastique en **temps** discret ($\mathrm{T} \subset \mathbf{Z}$) et $\mathscr{F}$ une filtration sur $\mathscr{T}$. On suppose que $\mathscr{F}$ est une **filtration adaptée** à (ou une **filtration compatible** avec) la famille $X = (X_t)_{t \in T}$: ie $X_t : \Omega \mapsto E$ est $\mathscr{T}_t$ -mesurable, $\forall\, t \in T$.

On appelle **temps d'arrêt (simple)** associé à la suite $(X_t, \mathscr{T}_t)_{t \in T}$ toute **variable aléatoire** $\tau : \Omega \mapsto T$ tq :

(a) $[\tau = t] = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = t\} \in \mathscr{T}_t, \quad \forall\, t \in T$;

(b) Card $\tau(\Omega) < +\infty$.

On définit alors la va, parfois dite **variable arrêtée**, X_τ, selon :

(2) $\quad (X_\tau)(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega),$

ainsi que la sous-tribu correspondante $\mathscr{T}_\tau$ selon :

(3) $\mathcal{T}_\tau = \{A \in \mathcal{T} : A \cap [\tau = t] \in \mathcal{T}_t, \forall t \in T\}$.

(iii) Les définitions précédentes s'étendent directement au cas où $(T, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné par $\leq$ (cf **relation d'ordre**).

On dit alors que la va τ est un **temps d'arrêt** de $\mathcal{F}$, ou encore que τ est une **variable aléatoire optionnelle** pour $\mathcal{F}$, ssi (1) est vérifiée.

Ainsi, la va constante $\omega \mapsto \tau(\omega) = t^* \in T$ est un temps d'arrêt.

Pour tout $t \in T$, la va suivante :

(4) $\tau \wedge t = \inf(\tau, t)$

est $\mathcal{T}_t$-mesurable. Si τ' et τ'' sont deux temps d'arrêt, alors $\tau' \wedge \tau''$ est aussi un temps d'arrêt. On définit de façon analogue la variable $\tau \vee t = \sup(\tau, t)$ et l'on montre que $\tau' \vee \tau''$ est aussi un temps d'arrêt.

Si $(\tau_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une **suite** croissante de temps d'arrêt, la limite $\tau_\infty = \lim \tau_n$ est encore un temps d'arrêt. En particulier, lorsque $T \subset \mathbf{R}_+$ (ou $T \subset \mathbf{R}$), on intègre souvent le point à l'infini $+\infty$ dans l'ensemble des valeurs de τ_∞ .

(iv) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus réel scalaire (ie $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ et en temps continu (ie tq $T =]0, T]$). On note $\mathcal{T}^X$ la **tribu de parties** de l'ensemble produit $\Omega^X = \Omega \times T$ engendrée par les « pavés » :

(5) $H \times]s, t]$, où $H \in \mathcal{T}_s$ et $(s, t) \in T^2_\leq$,

et l'on note $\mathcal{E}$ l'algèbre engendrée par ces pavés et $\mathcal{F} = (\mathcal{T}_t)_{t \in T}$ une filtration adaptée à X.

On dit qu'un **temps d'arrêt** (tq défini en (1)) est un **temps d'arrêt étagé** ou un **temps d'arrêt simple** ssi il ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans T. Autrement dit, si $k = 1,..., K$ et si $H_k \in \mathcal{T}_{tk}$ (la suite finie $(t_k)_{k=1,...,K}$ étant croissante avec k), on a par définition :

(6)
$$\tau = t_k \text{ sur } H_k \qquad \text{(pour tout k) ;}$$
$$\cup_{k=1}^K H_k = \Omega \text{ et } \cap_{k=1}^K H_k = \varnothing.$$

On peut donc écrire :

(7) $\tau = \Sigma_{k=1}^{K} t_k \mathbf{1}(H_k)$.

(v) Dans le cas d'une **chaîne de MARKOV** (indexée par **N**), soit $\mathscr{X}$ l'**espace des états** (au plus dénombrable), $\mathscr{X}^N$ celui des **trajectoires**, $\mathscr{B}(\mathscr{X}^N)$ une **tribu de parties** de $\mathscr{X}^N$ et $\mathscr{B}_N$ la sous-tribu engendrée par la suite $\{X_0, X_1, ..., X_N\}$.

Dans ce contexte, un **temps d'arrêt** est une **application** $\tau : \Omega \mapsto \mathbf{N}$ tq l'événement $[\tau = n] \in \mathscr{T}_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Par suite, on appelle **domaine de définition du temps d'arrêt** τ l'ensemble $A = \cup_{n \in \mathbf{N}} [\tau = n] \in \mathscr{B}(\mathscr{X}^N)$.

Tout temps d'arrêt constant $\tau = c \in \mathbf{N}$ admet pour domaine de définition l'ensemble $\mathscr{X}^N$ des trajectoires.