TENDANCE (N)
(06 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020))

La notion de **tendance** permet de caractériser en partie un **processus stochastique** générateur de **séries temporelles**.

(i) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un **processus** réel scalaire tq $T \subset \mathbf{R}$: eg $T = \mathbf{N}$, ou $T = \mathbf{Z}$, ou $T = \mathbf{Q}$, ou encore $T \in \mathcal{I}(\mathbf{R})$ (ensemble des intervalles de **R**).

On dit que :

(a) X est un **processus sans tendance moyenne**, ou un **processus sans tendance en moyenne**, ssi :

(a_1) $X_t \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^1 (\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\forall t \in T$,

et

(a_2) $E X_t = \mu$ ne dépend pas de $t \in T$;

(b) X est un **processus sans tendance en dispersion**, ou un **processus sans tendance en variance** ssi, à la fois :

(b_1) $X_t \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^2 (\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\forall t \in T$;

(b_2) $E X_t = \mu$ et $V X_t = \sigma^2$ ne dépendent pas de $t \in T$;

(c) X est un **processus sans tendance jusqu'à l'ordre p** ≥ 1 ssi, à la fois :

(c_1) $X_t \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^p (\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\forall t \in T$;

(c_2) $E X_t = \mu$ et $\mu_j = E (X_t - \mu)^j$ (avec j = 2 ,..., p) ne dépendent pas de $t \in T$;

(d) X est un **processus stationnaire jusqu'à l'ordre p** ≥ 1 ssi, à la fois :

(d_1) $X_t \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^p (\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\forall t \in T$;

(d_2) $E X_t = \mu$ ne dépend pas de t et $\mu_{\alpha\beta} (t, \tau) = E (X_t - \mu)^\alpha (X_\tau - \mu)^\beta = \phi (|\tau - t|)$, ie ne dépend que de la valeur $|\tau - t|$, $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tq $\alpha + \beta = p$ et $\forall (t, \tau) \in T^2$.

Les notions (a) et (b) de tendance sont les plus usuelles. La notion de **stationnarité** la plus courante est celle jusqu'à l'ordre 2, aussi appelée **stationnarité en covariance**, ou **stationnarité au second ordre**, ou encore **stationnarité au sens large** (cf **processus stationnaire en covariance**).

(ii) La notion de **tendance** est une notion relative. Elle dépend étroitement :

(a) de la nature concrète du **phénomène** aléatoire observé, et de l'interprétation de son évolution (cf aussi **niveau, répartition, évolution**) ;

(b) de l'ensemble T et, notamment, de sa « longueur » ou de son « étendue » : une évolution peut posséder une tendance d'un certain type (eg croissante) sur une période donnée, et d'un autre type (eg décroissante) sur une période plus longue contenant la première.

Ainsi, lorsque T est un ensemble borné, ou est une partie d'un ensemble ordonné, la notion de tendance dépend de la **longueur de la période de temps** (durée) étudiée, eg b - a, avec a = inf T et b = sup T. Il peut donc exister une tendance sur T sans qu'il y en ait une sur $S \supset T$, et inversement.

A titre d'exemples :

(a) physique (astrophysique) : la luminescence des étoiles peut avoir une tendance sur des multiples d'années-lumière ;

(b) biologie : la courbe de croissance de certains micro-organismes ou celle de leurs populations possède parfois une tendance correspondant à une période de quelques minutes ou de quelques heures seulement ;

(c) sociologie (économie) : une tendance correspond généralement à une période de temps allant eg de 10 à 50 ou 100 ans selon le rythme ou les périodicités propres à chaque variable économique : PIB, productivité du travail, cours d'un marché financier.

(iii) L'étude de la **tendance d'un processus** $X = (Xt)_{t \in T}$ s'effectue à l'aide d'une réalisation, complète ou partielle, $x = (x_t)_{t=1,\dots,T}$ de ce processus (**trajectoire** de X). Celle-ci est dite posséder une tendance lorsque, dans une décomposition classique tq (cf **composante d'une série temporelle**) :

(1) $$x_t = \phi(m_t, c_t, s_t, u_t), \qquad t = 1,\dots, T$$

sa **composante tendancielle** $m = (m_t)_{t \in T}$ n'est pas identiquement nulle.

La « détermination » (**estimation**) de la tendance est réalisable de deux façons :

(a) **méthodes « empiriques »**, parfois appelées **méthodes descriptives** : ces méthodes se bornent à analyser une série (en elle-même) ou plusieurs séries (en elles-mêmes). Elles ne permettent guère la **prévision**, sauf partiellement pour la dernière : **méthode des moyennes cycliques**, **méthode des moyennes groupées** (ou méthode des moyennes échelonnées), **méthode des moyennes mobiles** ;

(b) **méthodes « statistiques »**, ou **méthodes inférentielles**, eg :

(b_1) la forme analytique de la fonction $t \mapsto m_t$ définissant une tendance (non stochastique) est supposée connue, mais dépend d'un certain nombre de **paramètres** (à estimer), ou dépend d'un certain nombre de **variables exogènes** (ou variables « explicatives »). Des méthodes de **régression** sont alors généralement mises en oeuvre.

Des exemples classiques de formes analytiques pour $t \mapsto m_t$ sont les suivants :

$(b)_{11}$ forme linéaire (ou forme affine) ou, plus généralement, forme polynomiale (p + 1 paramètres à estimer) :

(2) $\quad m_t = P_l(t) = \Sigma_{j=1}^{p} a_j t^j$,

dans laquelle P est un polynôme de degré d° P = p ;

$(b)_{12}$ forme exponentielle (deux paramètres à estimer) ;

(3) $\quad m_t = a \,.\, e^{b\,t}$;

$(b)_{13}$ forme logistique (trois paramètres à estimer, avec $b > 0$) :

(4) $\quad m_t = (1 + a \,.\, e^{-b\,t})^{-1} \,.\, m$;

$(b)_{14}$ forme en « cloche » : eg **densité** de la **loi normale** ou de la **loi de CAUCHY** ;

(b_2) la forme analytique de $m = (m_t)_{t \in T}$ n'est pas connue, mais on la suppose définie par :

(5) $\quad t \mapsto m_t = E\, X_t$,

où X est un processus non stationnaire (en moyenne). On peut estimer la fonction m définie par $t \mapsto m(t) = m_t = E\, X_t$ eg à l'aide d'une **méthode des moyennes mobiles** ou d'un **lissage** de type exponentiel. Généralement, on doit aussi tester la stationnarité du processus $Y_t = X_t - \tilde{m}(t)$ qui en résulte (**test de stationnarité**), où $\tilde{m}$ désigne l'**estimateur** de m qui a été retenu. Pour cela, il est courant d'utiliser la série y définie par $y_t = x_t - \tilde{m}(t)$.

On inclut parfois la méthode des moyennes mobiles parmi les méthodes statistiques (cf eg **processus de moyenne mobile**). L'avantage de ces dernières tient aussi à ce que (a) elles permettent d'établir des prévisions (conditionnelles ou non) et (b) elles aident à définir divers **tests de tendance** pour des processus ou des séries.