TEST A STRUCTURE DE NEYMAN (I2)

(05 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$ un **modèle image**, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ un **espace mesurable** auxiliaire, $s : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ une **application mesurable** définissant une **statistique** $S = s(X)$ ou $s \circ X$, $\varphi : X \mapsto [0, 1]$ une **fonction de test** (pure ou aléatoire) et $\alpha \in]0, 1[$ un seuil donné.

On considère une **hypothèse statistique** $H_0 : P^X \in \mathcal{P}_0^X$ (où $\mathcal{P}_0^X \subset \mathcal{P}^X$). Alors :

(a) si $P \in \mathcal{P}$ est une **mesure de probabilité** correspondant au modèle de base $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ et si $E(. / S = s)$ désigne l'**espérance conditionnelle** pr à S , on dit que φ est un **test (à structure) de J. NEYMAN**, ou un **test à α -structure de J. NEYMAN**, pour S ssi :

$$(1) \quad E_P(\varphi(X) / S = s) = \alpha \quad (\text{P-p.s.}), \quad \forall P \in \mathcal{P}_0;$$

(b) si $\mathcal{P}_1^X = (\mathcal{P}_0^X)^c$ désigne l'**hypothèse alternative** complémentaire de $\mathcal{P}_0^X$, si S est une **statistique exhaustive** et si le test φ est supposé α -semblable sur $\mathcal{P}_\cap^X = \mathcal{P}_0^X \cap \mathcal{P}_1^X$ (cf **test α -semblable**), on dit que φ est un **test à structure de J. NEYMAN** pour S ssi :

$$(1)' \quad E_P(\varphi(X) / S = s) = \alpha \quad (\text{P-p.s.}), \quad \forall P \in \mathcal{P}_\cap^X,$$

(on peut noter E au lieu de E_P en raison de l'exhaustivité de S) ;

(c) s'il existe une **partie** non vide $\mathcal{G}^X \subset \mathcal{P}^X$ tq S est exhaustive pour le **modèle restreint** $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{G}^X)$, on dit que le test φ est un **test (à structure) de J. NEYMAN** ssi :

$$(1)'' \quad E_P(\varphi(X) / S = s) = \alpha \quad (\text{P-p.s.}), \quad \forall P \in \mathcal{G}^X.$$

Dans ce qui précède, on a noté $\mathcal{P}_0$ (resp $\mathcal{P}_\cap^X$, resp $\mathcal{G}^X$) l'ensemble des probabilités $P \in \mathcal{P}$ dont les images P^X par $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ appartiennent à $\mathcal{P}_0^X$ (resp $\mathcal{P}_\cap^X$, resp $\mathcal{G}^X$).

(ii) Dans le cas d'un modèle paramétré $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$, les formules (1) à (1)'' s'écrivent aussi, sous la forme :

$$(1)''' \quad E_\theta(\varphi(X) / S = s) = \alpha, \quad (\text{P}_\theta\text{-p.s.}), \quad \forall \theta \in \Lambda,$$

où Θ est supposé être un **espace topologique** et où Λ représente resp (cf aussi **test α -semblable**) :

(a) $\Theta_0 \subset \Theta$ (définition (1)) ;

(b) $\Theta_\cap = \text{adh}(\Theta_0) \cap \text{adh}(\Theta_1)$ (définition (1)) ;

(c) $\Gamma \subset \Theta$ (définition (1)).