TEST BILATERAL (I1)
(02 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On considère un **problème de test** fondé sur un modèle paramétré.

(a) on appelle **test entre deux hypothèses simples** tout test d'une **hypothèse de base** de la forme $H_0 : \theta = \theta_0$ (ou $\theta \in \{\theta_0\}$) contre une **hypothèse alternative** de la forme $H_1 : \theta = \theta_1$ (ou $\theta \in \{\theta_1\}$, où $\theta_0 \in \Theta$ et $\theta_1 \in \Theta$ sont deux éléments distincts donnés ($\theta_1 \neq \theta_0$) ;

(b) on appelle **test d'une hypothèse simple contre une hypothèse multiple** le test d'une hypothèse de la forme $H_0 : \theta = \theta_0$ (ou $\theta \in \{\theta_0\}$) contre une hypothèse de la forme $H_1 : \theta \in \Theta_1$, où Θ_1 est une partie non vide de Θ qui peut éventuellement comprendre θ_0 (**hypothèses emboîtées**), et tq Card $\Theta_1 \geq 2$;

(c) le **test d'une hypothèse multiple contre une hypothèse simple** se définit de façon symétrique ;

(d) on appelle **test entre deux hypothèses multiples** tout test d'une hypothèse de la forme $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre une hypothèse de la forme $H_1 : \theta \in \Theta_1$, où Θ_0 et Θ_1 sont deux parties non vides quelconques de Θ. On suppose souvent que $\{\Theta_0 , \Theta_1\}$ constitue une **partition** de Θ. Mais ceci n'est pas toujours le cas, selon le type de test recherché, ou selon la nature du problème : ainsi, on peut considérer le test dans lequel Θ_0 et Θ_1 sont deux parties distinctes de Θ, disjointes ou non. Enfin, on suppose que Card $\Theta_0 \geq 2$ et Card $\Theta_1 \geq 2$.

(ii) Si ξ est une **vars** et si $\Theta \subset \mathbf{R}$ (ou un ensemble totalement ordonné) (cf **relation d'ordre**), on peut vouloir tester une hypothèse de la forme $H_0 : \theta = \theta_0$ contre une hypothèse de la forme $H_a : \theta \neq \theta_0$. L'hypothèse H_a est appelée **hypothèse bilatérale**, et le test associé est appelé **test bilatéral**, ou **test bilatère**.

Par extension, on peut parler de **test bilatéral** si eg $H_a : \theta \in [\theta_{g1} , \theta_{g2}[\ \cup [\theta_{d1} , \theta_{d2}[$, avec $\theta_{g1} < \theta_{g2} < \theta_0 < \theta_{d1} < \theta_{d2}$ (deux intervalles, de largeurs données, encadrent θ à des distances données).

(iii) On suppose que $\Theta \subset \mathbf{R}$ (ou un ensemble totalement ordonné).

(a) on appelle **test unilatéral à droite** (resp **test unilatéral à gauche**) tout test de la forme :

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_1$,

avec $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = \{\theta \in \Theta : \theta > \theta_0\}$ (resp $\Theta_1 = \{\theta \in \Theta : \theta < \theta_0\}$) ;

(b) on appelle encore **test bilatéral** tout test de la forme :

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_1$,

avec $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = \Theta_0^c = \{\theta \in \Theta : \theta \neq \theta_0\}$.

(iv) Un test bilatéral s'effectue nécessairement contre une **alternative** H_1 composite (cf **hypothèse composite**). On généralise alors les définitions précédentes.

Ainsi, lorsque $\Theta \subset \mathbf{R}$ (ou un ensemble totalement ordonné) :

(a) un **test unilatéral** peut avoir l'une des formes suivantes :

$\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = [\theta_1', \theta_1'']$, avec $\theta_1' > \theta_0$;

$\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = [\theta_1', \theta_1'']$, avec $\theta_1'' < \theta_0$;

$\Theta_0 = [\theta_0', \theta_0'']$ et $\Theta_1 = \{\theta_1\}$, avec $\theta_1 > \theta_0''$;

$\Theta_0 = [\theta_0', \theta_0'']$ et $\Theta_1 = \{\theta_1\}$, avec $\theta_0' > \theta_1$;

$\Theta_0 = [\theta_0', \theta_0'']$ et $\Theta_1 = [\theta_1', \theta_1'']$, avec $\theta_0'' < \theta_1'$;

$\Theta_0 = [\theta_0', \theta_0'']$ et $\Theta_1 = [\theta_1', \theta_1'']$, avec $\theta_1'' < \theta_0'$;

(b) un **test bilatéral** peut recevoir l'une des formes :

$\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et et $\Theta_1 = \Theta_0{}^c = \{\theta \in \Theta : \theta \neq \theta_0\}$;

$\Theta_0 = [\theta_0', \theta_0'']$ et $\Theta_1 = \Theta_0{}^c$;

$\Theta_0 = [\theta_0', \theta_0'']$ et $\Theta_1 = [\theta_{11} , \theta_{12}] \cup [\theta_{21} , \theta_{22}]$, où $\theta_{12} < \theta_0'$ et $\theta_{21} > \theta_0''$.

(v) Plus largement, lorsque la va ξ est à valeurs dans $\mathbf{R}^K$ (**vecteur aléatoire**), on peut encore appeler **test bilatéral** le test d'une hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre une hypothèse de la forme $H_a : \theta \in T_K$, où eg :

(a) T_K est une **partie** de $\mathbf{R}^K$ de la forme $\Pi_{k=1}{}^K \{[\theta_{k,g(1)} , \theta_{k,g(2)}[\cup [\theta_{k,d(1)} , \theta_{k,d(2)}[\}$ (produit de réunions d'intervalles), où $[\theta_{k,g(1)} , \theta_{k,g(2)}[$ et $[\theta_{k,d(1)} , \theta_{k,d(2)}[$ sont des intervalles de la k-ième composante de $\mathbf{R}^K$, avec $\theta_{k,g(1)} < \theta_{k,g(2)} < \theta_{k,0} < \theta_{k,d(1)} < \theta_{k,d(2)}$. Les notations commodes g(k) et d(k) désignent resp g_k et d_k (k = 1, 2);

(b) ou encore T_K est une partie de $\mathbf{R}^K$ de la forme $B_K (\theta_0 , \theta_d) \setminus B_K (\theta_0 , \theta_g)$, où B (a, r) désigne la une **boule** de $\mathbf{R}^K$ de centre a et de rayon r et le triplet $(\theta_g , \theta_0 , \theta_d)$ est tel que $\theta_g = (\theta_{g(1)} ,..., \theta_{g(K)})$, $\theta_0 = (\theta_{0(1)} ,..., \theta_{0(K)})$, $\theta_d = (\theta_{d(1)} ,..., \theta_{d(K)})$, avec $|\theta_{g(k)} - \theta_{0(k)}| < |\theta_{d(k)} - \theta_{0(k)}|$, $\forall$ k = 1 ,..., K. Les notations commodes g(k), 0(k) et d(k) désignent encore resp g_k , 0_k et d_k (k = 1,..., K).

(vi) Dans ce qui précède :

(a) les inégalités de définition peuvent être écrites strictes (comme en (iii)) : le test est alors appelé **test strict**. Elles peuvent, alternativement, être écrites au sens large : le test est alors appelé **test large**. Ceci vaut notamment lorsqu'une des **lp** intervenant dans le test est une **loi discrète** ;

(b) d'autre part, les extrémités des intervalles peuvent aussi être infinies.

(vii) Un test bilatéral est parfois dit **test bilatère**, ou **test symétrique** ; un test unilatéral est parfois dit **test unilatère** ou **test asymétrique**.