TEST D'AUTOCORRÉLATION (C5, F3, I2, N2)
(06 / 06 / 2019)

Un **test d'autocorrélation** a pour objet la détection d'une éventuelle **corrélation** dans une **suite** aléatoire, un **processus** ou une **série temporelle**.

Ce type de tests admet pour **hypothèse nulle** l'absence d'autocorrélation (**suite iid**, **processus purement aléatoire**), et non pas l'existence d'une autocorrélation d'un type donné.

(i) Soit $x = (x_t)_{t=1,\ldots,T}$ une série temporelle réelle scalaire engendrée par un processus X donné. Un test d'autocorrélation consiste à tester l'**hypothèse de base** :

(1) H_0 : X est indépendant et équidistribué (processus iid),

(cf **suite indépendante**, **suite équidistribuée**, **suite iid**) contre une **alternative d'autocorrélation** :

(2)
H_1^+ : X est autocorrélé positivement
(resp. H_1^- : X est autocorrélé négativement).

(ii) Divers tests ont été définis, dont les plus courants sont les suivants :

(a) **test de C. EISENHART - F.S. SWED**, fondé sur la **médiane empirique** (supposée unique) $q_{1/2}\,x$ de x, dont on déduit le nombre S_T^+ (resp S_T^-) de groupes de termes consécutifs x_t de x tq $x_t > q_{1/2}\,x$ (resp $x < q_{1/2}\,x$).

Sous l'hypothèse H_0 , on montre ($\forall$ T $\geq$ 2) que :

(3)
$$E_0\, S_T = (T + 2) / 2,$$
$$V_0\, S_T = (T - 1) / 4,$$

où S_T désigne soit S_T^+, soit S_T^-.

Si $T << +\infty$, la loi de S_T sous l'hypothèse H_0 est tabulée.

Si $T >> 0$, on utilise la **propriété asymptotique** suivante (**convergence légale**) :

(4) $\mathscr{L}(U_T) \to_{T \to +\infty} \mathscr{N}(0.1)$ (**loi normale réduite**),

avec $U_T = (V_0\, S_T)^{-1/2}\,(S_T - E_0\, S_T)$ (variable centrée réduite) (cf **variable centrée**, **variable réduite**).

On peut alors directement définir le test de H_0 contre H_1^+ (resp contre H_1^-) ;

(b) **test de H.L. MOORE - K.F. WALLIS**, fondé sur le nombre de points de retournements de x (cf aussi **test des retournements**) ;

(c) **test de R.L. ANDERSON**, fondé sur la suite des coefficients d'autocorrélation circulaire associée à x. On définit un **coefficient d'autocorrélation circulaire** empirique selon :

(5) $r_\theta' = s_T^{-2} . \{T^{-1} . \Sigma_{t=1}^{T} x_t \, x_{t+\theta} - \bar{x}_T^{2}\}$,

où $\bar{x}_T = T^{-1} \Sigma_{t=1}^{T} x_t$ (**moyenne empirique**), $s_T^2 = T^{-1} \Sigma_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x}_T)^2$ (**variance empirique**), avec la convention :

(6) $x_{T+1} = x_1 ,..., x_{T+\theta} = x_\theta , \quad \forall \theta$.

Par suite, il existe une **matrice** carrée A_θ tq :

(7) $r_\theta' = x' A_\theta \, x / x' P x = s_\theta (x)$,

où P est la **matrice de centrage par rapport à la moyenne** et $x = (x_1 ,..., x_T)' \in \mathbf{R}^T$. Comme s_θ est symétrique, il existe une transformation orthogonale $x \mapsto y = Q_\theta \, x$ tq :

(8) $r_\theta' = y' \Lambda_\theta \, y / y' y = t_\theta (y)$,

où $\Lambda_\theta \in D_T (\mathbf{R})$ (**matrices diagonales**). Par suite, l'indépendance entre les x_t entraîne l'indépendance entre les y_t .

Sous l'hypothèse H_0 , on montre, dans le cas d'une autocorrélation du premier ordre, que :

(9)
$$E_0 \, r_1' = - (T - 1)^{-1},$$
$$V_0 \, r_1' = (T - 1)^{-2} . (T - 2).$$

Dans le cas général, on établit la **convergence en loi** :

(10) $\mathscr{L}(Z_T) \to_{T \to +\infty} \mathcal{N} (0, 1)$,

où $Z_T = (V_0 \, r_\theta')^{-1/2} (r_\theta' - E_0 \, r_\theta')$ (variable centrée réduite).

On en déduit un test asymptotique d'autocorrélation (cf aussi **rapport de NEUMANN**).