TEST D'UNIMODALITÉ (C5, I2)

Un **test d'unimodalité** tire sa finalité de l'intérêt pratique à utiliser une **loi unimodale** (cf aussi **méthode du maximum de vraisemblance** ou **école bayésienne**). En effet :

(a) les **observations** disponibles peuvent, notamment lorsqu'elles sont peu nombreuses, comporter des « trous » (cf **lacune**) tendant à étayer l'hypothèse d'un **mélange de lois** : l'**histogramme** obtenu peut alors comporter des classes « rares » ou vides (cf **loi multimodale**) ;

(b) en outre, une loi unimodale est souvent une **loi symétrique** : il est donc utile de tester si une loi donnée est unimodale, ou si elle appartient à une famille de lois unimodales.

(i) On considère un **modèle produit** $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$ dans lequel $X = (X_1, ..., X_N)$ est un **échantillon iid** selon une **loi** P^ξ, ie $P^X = (P^\xi)^{\otimes N}$. Ici, $P^\xi \in \mathcal{P}^\xi$ est supposée être la « vraie » loi qui génère l'échantillon X.

Un **test d'unimodalité** a pour objectif de détecter si l'**hypothèse de base** :

H_0 : P^ξ est une **loi unimodale**,

est plus vraisemblable qu'une **hypothèse alternative** donnée, laquelle est, le plus souvent, l'alternative générale :

H_a : P^ξ n'est pas une loi unimodale (ie P^ξ est multimodale).

Un test d'unimodalité est donc plus ou moins fondé sur les propriétés connues du **mode** et suppose souvent une hypothèse de **différentiabilité** de la **densité**.

Deux approches sont présentées, dans le cas où $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ (**tribu borélienne**).

(ii) Soit F la **fonction de répartition** théorique associée à P^ξ et F_N la **fr empirique** associée à X. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions F ($\mathcal{F}$ est donc associé à l'ensemble $\mathcal{P}^\xi$ des lois P^ξ) et l'on suppose donnée une **distance** d sur $\mathcal{F}$, eg :

(1) $d(F_1, F_2) = \sup_{x \in \mathcal{X}} |F_1(x) - F_2(x)|, \quad \forall (F_1, F_2) \in \mathcal{F}^2.$

On considère alors un **test d'unimodalité** tq le suivant :

$$(2)\quad \begin{cases} H_0 : \; F = F_0 \quad \text{(fonction unimodale en un point } \alpha \in \mathscr{X}\text{)}, \\ H_a : \; F \in \mathscr{F} \setminus \{F_0\} \quad \text{(fonctions multimodales)}, \end{cases}$$

et l'on pose :

$$(3)\qquad \delta(F) = \inf_{G \in \mathscr{G}} d(F, G),$$

où $\mathscr{G} = \{G : \mathbf{R} \mapsto [0, 1]\} = \mathscr{F} \setminus \{F_0\}$ désigne l'ensemble des fonctions de répartition multimodales. En effet, si F_0 est unimodale (au point α) et si les fonctions G sont multimodales, le nombre $\delta(F_0)$ sera généralement plus grand que si les fonctions G étaient toutes unimodales en α.

Par suite, la **statistique naturelle** :

$$(4)\qquad D_N = \delta(F_N)$$

peut servir à fonder un test d'unimodalité. En effet, le **théorème de CANTELLI-GLIVENKO** implique que, sous H_0, $d(F_N, F_0) \to 0$ lorsque $N \to +\infty$;

(iii) Le test précédent supposait que les éléments $G \in \mathscr{G}$ de l'hypothèse alternative H_a comportaient un nombre indéterminé (mais supérieur à 1) de modes. Or la multiplicité des modes d'une loi vient souvent du fait que cette loi est un **mélange légal** (ou peut être considérée comme tel).

Un autre type de test consiste à supposer, dans le **modèle image** précédent (**modèle produit**), que :

$$(5)\qquad P^{\xi} = \Sigma_{i \in I}\, \alpha_i \, . \, P_i \, ,$$

où I est un ensemble d'indices fini (donné a priori) et où chaque composante P_i ($i \in I$) du mélange (5) est supposée (sans restreindre la généralité) unimodale.

Dans ce cadre, l'**hypothèse d'unimodalité** H_0 peut alors s'écrire (« absence » de mélange) :

$$(6)\qquad H_0 : \; \exists\, i \in I : \alpha_i = 1 \;\text{ et }\; \alpha_j = 0 \; (\forall\, j \in I \setminus \{i\}).$$

Son **alternative** H_a est alors la complémentaire $H_0^{\,c}$ (« existence » d'un mélange).

A une **permutation** près sur l'ensemble I, le test peut se ramener à un test portant sur les **proportions** α_i du mélange. Lorsque $\mathscr{P}^{\xi}$ est une **famille de lois identifiable**, une **procédure** consiste à estimer, la **suite** $(\alpha_i)_{i \in I}$ définie par (5) selon $\alpha^{\sim} = (\alpha_i^{\sim})_{i \in I}$ (eg à l'aide de la **méthode du maximum de vraisemblance contraint**), puis à tester (6) à l'aide de la loi de $\alpha^{\sim}$.