TEST DE COCHRAN (2) (I2)

(19 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Ce second **test de COCHRAN** sert à vérifier si un échantillon (vectoriel) est totalement **aléatoire**.

(i) On considère le **problème à plusieurs échantillons** X^i ($i = 1, \dots, k$), dans lequel on suppose :

(a) que ceux-ci sont de même taille ($N_i = N, \forall i$) et appariés entre eux : ainsi, pour tout n , $X_{i(n)}$ ($i = 1, \dots, k$) peut représenter k variables mesurées sur l'**unité statistique** n (eg au cours d'une **expérience aléatoire**) ;

(b) que les variables $X_{i(n)}$ sont des **variables indicatrices** à valeurs dans $\{0, 1\}$, ie des **variables qualitatives** élémentaires traduisant des « réponses » du type « tout ou rien », « oui ou non », « succès ou échec », etc (eg réactions à un **stimulus**). Les vecteurs (colonnes) $X^i \in \{0, 1\}^N$ sont disposés dans une (N, k) -**matrice** notée $X \in M_{Nk}(\{0, 1\})$.

On cherche à tester l'**hypothèse de base** :

(1) H_0 : X est purement aléatoire

(ie les colonnes X^i de X , ainsi que ses lignes X_n , sont des **suites iid**).

Ce **test de W.G. COCHRAN** est alors fondé sur la **statistique de test** suivante, dite **statistique de W.G. COCHRAN** :

$$(2) \quad Q_N = A / B, \text{ avec :} \quad A = k(k-1) \sum_{i=1}^k (C_i - \bar{C}_k)^2,$$
$$B = k \sum_{n=1}^N L_n - \sum_{n=1}^N L_n^2,$$

où :

$$C_i = e_N' X^i \quad (\text{nombre de 1 dans la colonne } X^i),$$
$$(3) \quad \bar{C}_k = k^{-1} \sum_{i=1}^k C_i \quad (\text{moyenne arithmétique des } C_i),$$
$$L_n = X_n e_k \quad (\text{nombre de 1 dans la ligne } X_n).$$

(ii) Sous H_0 , on établit la **convergence en loi** suivante :

$$(4) \quad \mathcal{L}(Q_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_{k-1}^2 \quad (\text{loi du chi-deux à } k-1 \text{ degrés de liberté}).$$

La **région critique** (asymptotique) du test est alors de la forme :

$$(5) \quad w = \{Q_N > q_{1-\alpha}\},$$

où $q_{1-\alpha}$ est le **quantile** d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\mathcal{X}_{k-1}^2$ précédente et $\alpha \in]0, 1[$, avec $\alpha \ll 1$.