TEST DE MANN - WHITNEY (C4, F4, F6, I2)
(14 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Le test de MANN - WHITNEY est une autre forme du **test de WILCOXON** pour le problème à deux **échantillons** (cf **problème à plusieurs échantillons**). Chaque population i correspondant à un échantillon est représentée par sa **fonction de répartition** F_i (i = 1, 2).

(i) Le **test de H.B. MANN - D.R. WHITNEY** porte sur l'**hypothèse de base** suivante :

(1) $H_0 : F_2 = F_1$ (**homogénéité** stricte des deux **populations** 1 et 2),

contre une **alternative** de **croissance stochastique** tq :

(2) $H_1 : F_2 \leq F_1$ (cas unilatéral à droite).

L'alternative est ainsi l'**hypothèse** selon laquelle la **vars** ξ_2 (dont la **fonction de répartition** est F_2) décrivant la population n° 2 est stochastiquement plus grande que la vars ξ_1 (de **fr** F_1) qui décrit la population n° 1.

(ii) Si N_i (noté par commodité N(i)) désigne la taille de l'**échantillon** X^i (i = 1, 2), la statistique $W_{N(1)N(2)}$ de WILCOXON s'écrit aussi sous la forme (cf **test de WILCOXON**) :

(3) $$W_{N(1)N(2)} = \Sigma_{n(1)=1}{}^{N(1)} \Sigma_{n(2)=1}{}^{N(2)} u\,(X_{1,n(1)} - X_{2,n(2)}),$$

dans laquelle u est la **fonction de HEAVYSIDE**.

La **statistique de H.B. MANN - D.R. WHITNEY** est alors définie comme :

(3) $$V_{N(1)N(2)} = \Sigma_{n(1)=1}{}^{N(1)} \Sigma_{n(2)=1}{}^{N(2)} u\,(X_{2,n(2)} - X_{1,n(1)}),$$

ie comme le nombre de fois où les coordonnées de X^2 dépassent celles de X^1.

Lorsque $N << \infty$ (petits échantillons), cette **statistique de test** admet, sous H_0 , une **loi de probabilité** qui est tabulée. Dans ce cas, on a :

(4) $$E_0\, V_{N(1)N(2)} = (1/2)\,(N_1\, N_2),$$
$$V_0\, V_{N(1)N(2)} = (1/12)\,(N_1\, N_2)\,(N_1 + N_2 + 1).$$

ce qui permet de définir des **régions critiques** et de réaliser le test de H_0 à distance finie.

Si $N >> 0$, le test est basé sur la **propriété asymptotique** suivante :

(5) $$\mathscr{L}(U_{N(1)N(2)})_{N^* \to \infty}{}^{H0} \to \mathscr{N}(0, 1)$$ (**loi normale réduite**).

où $U_{N(1)N(2)} = (V_0 V_{N(1)N(2)})^{-1/2} (V_{N(1)N(2)} - E_0 V_{N(1)N(2)})$ (variable centrée réduite) et $N^* = \min \{N_1 , N_2\}$.

(iii) Asymptotiquement, l'**efficacité asymptotique** de ce test pr à celle du **test de FISHER-YATES** vaut $E_\infty = 3 / \pi$. (cf **efficacité relative asymptotique entre tests**).