

TEST DE THEIL (I2)

(12 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Ce **test non paramétrique** concerne la pente d'une droite de **régression**.

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ un **modèle statistique** et $(\xi, \eta) ; \Omega \mapsto \mathbf{R}^2$ un **couple aléatoire** réel dont la loi $P^{(\xi, \eta)}$ est une **loi absolument continue** pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_2 (cf aussi **fonction absolument continue**).

On suppose que η s'exprime (dans un **espace de variables**) en fonction de ξ selon un **modèle de régression** de la forme (affine) :

$$(1) \quad \eta = a + b \xi + \varepsilon, \quad \text{avec } E(\varepsilon / \xi) = 0,$$

où (a, b) est le **paramètre d'intérêt** inconnu.

Soit $((X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N))$ un **échantillon iid** selon $P^{(\xi, \eta)}$. On suppose, sans restreindre la généralité, que $X_1 < \dots < X_N$.

Etant donné $b_0 \in \mathbf{R}$, on veut tester l'**hypothèse de base** :

$$(2) \quad H_0 : b = b_0$$

contre l'**alternative** unilatérale à droite :

$$(3) \quad H_1^+ : b > b_0 \quad (\text{pente réelle supérieure à } b_0).$$

On appelle **test de H. THEIL** le test fondé sur la **statistique de test** suivante, dite **statistique de H. THEIL** :

$$(4) \quad T_N = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N v(U_\alpha - U_\beta),$$

dans laquelle $U_n = Y_n - b_0 X_n$ et $v : \mathbf{R} \mapsto \{-1, 0, +1\}$ est une **fonction numérique** définie par :

$$(5) \quad v(h) = \begin{array}{lll} +1 & \text{ssi} & h > 0, \\ 0 & \text{ssi} & h = 0, \\ -1 & \text{ssi} & h < 0. \end{array}$$

(ii) Sous l'hypothèse H_0 , et pour un **niveau** $\alpha \in]0, 1[$ donné :

(a) lorsque $N \ll +\infty$ (petit échantillon), la **loi** de T_N est tabulée. Elle admet les deux premiers **moments** suivants :

$$(6) \quad \begin{aligned} E_0 T_N &= 0, \\ V_0 T_N &= (1/18) (N - 1) N (2N + 5). \end{aligned}$$

On peut alors procéder au test « à distance finie » dans lequel les **régions critiques** associées à α sont de la forme $w = \{T_N > q_{1-\alpha}\}$;

(b) lorsque $N \gg 0$ (grand échantillon), le test de H. THEIL admet une version asymptotique, basée sur la **propriété asymptotique** suivante de T_N (**convergence en loi**) :

$$(7) \quad \mathcal{L}(Z_N) \rightarrow \rightarrow +\infty \mathcal{N}(0, 1) \quad (\text{loi normale réduite}),$$

où $Z_N = (T_N - E_0 T_N) / \sigma_0(T_N)$ est la statistique centrée réduite (cf **variable centrée, variable réduite**) et $\sigma_0(T_N) = \{V_0 T_N\}^{1/2}$ désigne l'**écart-type** de T_N .

(iii) Le test se transpose directement :

(a) au cas d'une alternative unilatérale à gauche :

$$(3)' \quad H_1^- : b < b_0 ,$$

avec des **régions critiques** de la forme $w = \{T_N < q_{1-\alpha}\}$;

(b) où au cas d'une alternative bilatérale (cf **test bilatéral**) :

$$(3)'' \quad H_1 : b \neq b_0 ,$$

avec des régions de rejet tq $w = \{|T_N| > q_{1-(\alpha/2)}\}$.