TEST DE L'HYPOTHESE LINÉAIRE (A3, I2, J1)
(08 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Le **test de l'hypothèse linéaire** est un test classique dans le cadre du **modèle de régression multiple**.

(i) Soit $\eta = \xi\,' b + \varepsilon$ un **modèle de régression linéaire** multiple « observé » selon :

(1) $y = X b + u$, avec $Eu = 0$ et $V u = \sigma^2 I_N$.

On suppose que rg X = K et qu'il existe une **matrice** $R \in M_{JK}$ (**R**), de **rang** rg R = J < K, et un vecteur $r \in \mathbf{R}^J$ tq l'ensemble S (R, r) des solutions du **système linéaire** R b = r (contrainte sur le paramètre b) soit non vide (cf **contrainte sur les paramètres**).

On veut tester l'**hypothèse de base** suivante, appelée **hypothèse linéaire** :

(2) H_0 : $b \in S(R, r)$

contre l'**hypothèse alternative** (hypothèse complémentaire) :

(3) H_0 : $b \in \{S(R, r)\}^c$.

Si le vecteur u des **perturbations** est normal, ie si :

(4) $u \sim \mathcal{N}_N (0, \sigma^2 I_N)$,

le **test de l'hypothèse linéaire**, souvent appelé **test de R.A. FISHER**, est fondé sur la **statistique de R.A. FISHER** définie par :

(5) $F_N = A_N / B_N$,

avec $A_N = J^{-1} (||u_0^\wedge||^2 - ||u^\wedge||^2)$ et $B_N = (N - K)^{-1} ||u^\wedge||^2$, dans laquelle :

(a) $u_0^\wedge = y - X b_0^\wedge$ est le **résidu** (vectoriel) calculé avec l'**estimateur des mco** $b_0^\wedge$ de b contraint par l'hypothèse H_0 (ie $b \in S(R, r)$) ;

(b) $u_0 = y - X b^\wedge$ est le résidu calculé avec l'estimateur des mco $b^\wedge$ de b non contraint par H_0 (ie estimateur « libre »).

Sous l'hypothèse H_0 , la statistique F_N vérifie la propriété importante suivante :

(6) $F_N \sim \mathcal{F}_{J,N-K}$ (**loi de FISHER-SNEDECOR** à J et N-K **dl**).

Par suite, un test de niveau $\alpha \in]0,1[$, appelé **test de R.A. FISHER**, admet une **région critique** de la forme :

(7) $w = [F_N > q_{1-\alpha} (N, J, K)]$,

dans laquelle $q_{1-\alpha}$ (N, J, K) est le **quantile** d'ordre 1 - α de la loi $\mathscr{F}_{J,N-K}$.

(ii) Il existe notamment deux applications de ce test :

(a) si $X = [x_1, ..., x_k]$ est tq $x_1 = e_N$ (modèle avec terme constant) (cf **constante**), on teste souvent, en pratique, l'hypothèse :

(8) $H_0' : b_2 = ... = b_K = 0$.

Dans ce cas, le carré R^2 du **coefficient de détermination** du modèle (1) a un sens, et l'on montre que F_N s'exprime en fonction de R^2 selon la formule, souvent utile :

(9) $F_N = (N - 1)^{-1} (N - K) (1 - R^2)^{-1} R^2$.

(b) le **test de CHOW** constitue un cas particulier important du test de FISHER.

(iii) Le test de R.A. FISHER défini en (7) est un **test exact** à distance finie ($N << +\infty$), mais sous l'hypothèse de normalité. Il se généralise au cas où u est elliptiquement normale, ie où $u \sim \mathscr{N}_N (0 , \Sigma)$ (cf aussi **loi à contour elliptique**).

(iv) Il existe des tests asymptotiques de l'hypothèse linéaire H_0 précédente : le **test de WALD**, le **test du rapport des vraisemblances** et le **test des multiplicateurs de LAGRANGE**.

Ces tests peuvent s'affranchir de l'hypothèse de normalité (4) précédemment faite sur u.