TEST DES RETOURNEMENTS (E, F, I2, N5)
(04 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un **processus stochastique** (ou une **série temporelle**) constitué(e) de **vars** X_t .

On pose (**différences finies** avant d'ordre 1) :

(1) $D_t = \Delta X_t = X_{t+1} - X_t$, $\forall$ t = 1 ,..., T - 1.

On dit alors que la date t est un **instant de retournement**, ou un **« point » de retournement** de X ssi $D_{t-1} > 0$ et $D_t < 0$ ou vice versa. Autrement dit, t est un **point de retournement** de X ssi $D_{t-1} . D_t < 0$.

(ii) On appelle alors **test de retournements** tout test (en général non paramétrique) de l'**hypothèse de base** :

(2) H_0 : X est un **processus purement aléatoire** (donc indépendant)

fondé sur la **suite** $D = (D_t)_{t=1,...,T-1}$.

Si H_0 est vérifiée, la **proportion** du nombre de retournements :

(3) $R_T = (T - 2)^{-1} \Sigma_{t=2}^{T-1} \mathbf{1}([D_{t-1} D_t < 0])$

est élevée (ie proche de l'unité), où $\mathbf{1}(A) = \mathbf{1}_A$ désigne la **fonction indicatrice** d'une **partie** A, et le crochet [.] contient un **événement aléatoire**.

Dans le cas contraire (**hypothèse alternative**), on peut considérer que le processus possède une **tendance** (cf aussi **test des signes**, **test d'autocorrélation**).

Plus précisément, si $S_T = (T - 2) R_T$ est le nombre de retournements (avec $T \geq 2$), on montre, sous l'hypothèse H_0 précédente, que :

(4)
$$E_0 S_T = (2 T - 4) / 3 \qquad \text{(moyenne)}$$
$$V_0 S_T = \{\sigma_0 (S_T)\}^2 = (16 T - 29) / 90 \qquad \text{(variance)}.$$

On établit la **convergence en loi** suivante :

(5) $U_T \to^{\mathscr{L}}_{T \to +\infty} \mathcal{N}_1 (0, 1)$ (**loi normale réduite**),

avec $U_T = (S_T - E_0 S_T) / \sigma_0 (S_T)$ (statistique centrée réduite) (cf **variable normée**).

Par suite, si l'**alternative** est de type bilatéral (ie la tendance de X est croissante ou décroissante), et pour un seuil $\alpha \in]0,1[$ donné, le test des retournements admet des **régions critiques** (« symétriques ») de la forme :

(6) $w = \{|U_T| > q_{1-\alpha/2}\}$,

où $q_{1-\alpha/2}$ est le **quantile** d'ordre 1 - (α / 2) de la loi $\mathcal{N}_1$ (0, 1).

On peut, de façon analogue, définir des tests contre des alternatives unilatérales.