TEST DES SIGNES (I2, N5)
(12 / 06 / 2019)

Le **test des signes** est un **test non paramétrique** est basé sur les signes des **observations**. Il est utilisé dans divers contextes : **série temporelle**, **processus purement aléatoire**.

(i) Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **modèle statistique**, $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars**. On note $Q_{1/2}\,\xi$ la **médiane** (supposée unique) de ξ et $X = (X_1, ..., X_N)$ un **échantillon aléatoire** indépendant constitué de **copies** d'une même **variable aléatoire** ξ, ie un **échantillon iid** selon la **loi** P^{ξ} de ξ.

On veut tester l'**hypothèse de base** :

(1) $H_0 : Q_{1/2}\,\xi = 0$

contre des **alternatives** tq (alternatives unilatérales) :

$H_1 : Q_{1/2}\,\xi > 0,$

(2) ou

$H_1 : Q_{1/2}\,\xi < 0,$

ou encore (alternative générale, ou alternative bilatérale) :

(2)' $H_1 : Q_{1/2}\,\xi \neq 0.$

Sous H_0 , on a $F(0) = 1/2$ ou $F^{-1}(1/2) = 0$ (où F représente la **fonction de répartition** associée à P^{ξ}).

On appelle **test des signes**, ou parfois **test du signe**, un test fondé sur la **statistique de test** suivante, appelée **statistique des signes**, ou **statistique du signe**, (cf aussi **fonction signe**) :

(3) $S_N^+ = \Sigma_{n=1}^N u(X_n)$ (resp $S_N^- = N - S_N^+$),

qui représente le nombre d'observations positives (resp le nombre d'observations négatives), où u désigne la **fonction de HEAVYSIDE**.

Sous l'hypothèse H_0 , on montre que :

(4) $N^{-1} S_N^- \sim \mathscr{B}(N, 1/2)$ (**loi binômiale**).

Le test des signes est alors fondé sur la **loi** de la statistique précédente : à seuil $\alpha \in]0,1[$ donné, une **région critique** du test est établie à partir de ses **quantiles**.

Lorsque N est grand (N >> 0), on utilise l'**approximation** asymptotique gaussienne suivante (cf **convergence en loi**) :

(5) $\mathscr{L}(N^{-1} S_N^-) = \mathscr{B}(N, 1/2) \to^{H0}{}_{N \to +\infty} \mathscr{N}_1 (N/2 , N/4)$ (**loi normale**).

Autrement dit, la **statistique** $N^{-1/2} (2 S_N^- - N)$ tend en loi vers $\mathscr{N}(0,1)$. Cette propriété permet alors d'effectuer un test asymptotique de H_0 : à seuil $\alpha \in]0,1[$ donné, une **région critique** peut être établie à partir des quantiles de $\mathscr{N}(0,1)$.

(ii) Plus généralement, on peut vouloir tester une hypothèse de base tq :

(6) $H_0 : Q_p \xi = q_0$,

où $Q_p \xi$ est le quantile d'ordre $p \in]0,1[$ de ξ et où $q_0 \in \mathbf{R}$ est donné.

On considère la statistique suivante (nombre d'observations inférieures à q_0), qui généralise la statistique S_N^- précédente :

(6) $S_N = N . F_N (q_0)$,

où F_N est la **fonction de répartition empirique** associée à X.

On établit alors que, sous H_0 :

(7) $S_N \sim^{H0} \mathscr{B}(N, p)$ (**loi binômiale**),

ce qui définit un **test des signes généralisé**, fondé sur la statistique S_N .

Par suite, on a asymptotiquement la convergence en loi :

(8) $\mathscr{L}(U_N) \to^{H0}{}_{N \to +\infty} \mathscr{N}_1 (0 , 1)$ (**loi normale**),

où $U_N = \{N p (1 - p)\}^{-1/2} (S_N - N p)$ est la statistique normalisée déduite de S_N (cf **normalisation**).

(iii) Le test des signes est, en général, utilisé pour des lois P^ξ quelconques. Lorsque ces lois constituent une famille de **lois symétriques**, on utilise aussi un **test de permutation**.