TEST DU RAPPORT DES VRAISEMBLANCES (I4)
(23 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **test du rapport de(s) vraisemblance(s)** est un **test d'hypothèses** d'application générale dès lors qu'il s'associe à une **représentation statistique** dominée (cf **modèle dominé**).

(i) Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle image** dans lequel on suppose que $\mathscr{P}^X = (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ est une **famille de lois dominée** uniformément par une **mesure positive** σ-finie μ (cf **mesure σ-finie**). On note :

(1) $\quad f_\theta$ ou $f(. , \theta) = dP / d\mu, \qquad \forall\, \theta \in \Theta,$

la **dérivée de NIKODYM - RADON** (ou **vraisemblance**) des lois P_θ^X $(\theta \in \Theta)$ pr à μ.

Soit $\Theta_0 \subset \Theta$ une **partie** non vide et $\Theta_1 \subset \Theta$ une partie non vide disjointe de Θ_0 (ie $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$). On veut tester l'**hypothèse de base** :

(2) $\quad H_0 : \theta \in \Theta_0$

contre l'**hypothèse alternative** :

(3) $\quad H_1 : \Theta_1$.

On note $\theta^{\tilde{}}$ l'**estimateur du mv** de θ contraint par l'hypothèse H_i (i = 0, 1) (cf **maximum de vraisemblance contraint**), ie tq $\theta \in \Theta_i$ (i = 0, 1). Autrement dit, pour chaque $i \in N_1$, il existe une **application mesurable** $t_i : \mathscr{X} \mapsto \Theta$ tq :

(4) $\quad f(x, \theta_i^{\tilde{}}) = \sup_{\theta \in \Theta(i)} f(x, \theta) \qquad (\mu\text{-p.p. } \forall\, x \in \mathscr{X}),$

$\quad$ avec $\theta_i^{\tilde{}} = t_i(x),$

où $\Theta(i)$ dénote, par commodité, la **partie** Θ_i de Θ (i = 1, 2).

On appelle alors **statistique du rapport des vraisemblances** de θ la **statistique de test** Λ définie par l'application mesurable λ tq :

(5) $\quad x \in \mathscr{X} \mapsto \Lambda = \lambda(x) = f(x, t_0(x)) / f(x, t_1(x)).$

(ii) Telle quelle, cette **statistique** est d'utilisation délicate. Si H_0 est une **hypothèse simple** et H_1 une alternative générale (ie quelconque), ou encore si Θ_0 est de « mesure » négligeable par rapport à Θ_1 et que $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, on préfère lui substituer la statistique de test suivante, appelée **statistique du rapport des vraisemblances maximales de J. NEYMAN - E.S. PEARSON**, ou simplement **statistique du rapport des vraisemblances de J. NEYMAN - E.S. PEARSON** :

(6) $\quad x \in \mathscr{X} \mapsto \Lambda = \lambda(x) = \sup_{\theta \in \Theta 0} f(x, \theta) / \sup_{\theta \in \Theta 1} f(x, \theta).$

La définition (6) implique que Λ est une statistique bornée, ie :

(7) $0 \leq \Lambda \leq 1$.

Certains auteurs prennent le rapport inverse du précédent, rapport non borné à valeurs dans $[1, +\infty[$.

(iii) On appelle alors **test du rapport des vraisemblances** (**maximales**) de niveau $\alpha \in]0, 1[$ tout test φ dont la **région critique** est de la forme :

(8) $w = [\Lambda \leq q_{1-\alpha}]$,

où $q_{1-\alpha}$ est le **quantile** d'ordre $1 - \alpha$ de la **loi de probabilité** de Λ.

(iv) Une **situation statistique** fréquente en pratique est celle où le modèle initial ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) précédent est un **modèle produit** (ou **modèle d'échantillonnage** non nécessairement équidistribué), formé à partir de N modèles, ie un modèle de la forme $(\prod_{n=1}^N \mathscr{X}_n , \otimes_{n=1}^N \mathscr{B}_n , (\otimes_{n=1}^N P_\theta^{X(n)})_{\theta \in \Theta})$, où $\Theta \in \mathscr{O}(\mathbf{R}^Q)$ (ouvert de $\mathbf{R}^Q$) et où X(n) désigne X_n par commodité.

Dans ce cas, la vraisemblance (1) s'écrit (avec des notations évidentes) :

(1)' $f(x, \theta) = f(x_1 ,..., x_N , \theta) = \prod_{n=1}^N p_n (x_n , \theta)$,

et la statistique du **rapport des vraisemblances** (maximales) s'écrit :

(9) $\Lambda_N = \lambda_N (x) = \sup_{\theta \in \Theta 0} f(X, \theta) / \sup_{\theta \in \Theta 1} f(X, \theta)$.

Par suite :

(a) pour tester l'hypothèse simple $H_0 : \theta = \Theta_0$, on utilise le fait que la statistique :

(9) $R_N = 2 . \mathrm{Log}\, \Lambda_N$

vérifie la **propriété asymptotique** suivante, valable sous H_0 :

(10) $\mathscr{L}(R_N) \to^{H0}{}_{N \to +\infty} \mathscr{X}_Q{}^2$ (**loi du chi-deux** à Q **degrés de liberté**).

La **région critique** correspondant au test est alors de la forme :

(8)' $w' = [R_N \geq q_{1-\alpha}']$,

où $q_{1-\alpha}'$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du chi-deux précédente. Il s'agit donc d'une **région critique asymptotique** associée au test du rapport des vraisemblances (qui est lui-même un test asymptotique) (cf **propriété asymptotique**). Cette région est tq :

$$(11) \quad \lim_{N \to +\infty} P_\theta^X(w') = \begin{cases} \alpha \text{ ssi } \theta = \theta_0 , \\ 1 \text{ ssi } \theta \neq \theta_0 . \end{cases}$$

(b) pour tester l'hypothèse $H_0 : \theta \in \Theta_0$ dans laquelle Θ_0 est une **variété différentielle** régulière de dimension K de Θ (avec $K < Q$), on utilise le fait que la statistique R_N , définie en (9) vérifie (sous l'hypothèse H_0) :

(10)' $\mathscr{L}(R_N) \to^{H0}{}_{N \to +\infty} \mathscr{X}_{Q\text{-}K}{}^2$ (loi du chi-deux à Q-K **dl**).

La région critique correspondant au test s'écrit alors :

(8)" $w'' = [R_N \geq q_{1-\alpha}'']$,

où $q_{1-\alpha}''$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du chi-deux indiquée en (10)'. Cette région est tq :

$$(11)'' \quad \lim_{N \to +\infty} P_\theta^X(w'') = \begin{cases} \alpha \text{ ssi } \theta \in \Theta_0 , \\ 1 \text{ ssi } \theta \notin \Theta_0 . \end{cases}$$

(v) Un exemple classique d'application de ce test est celui du **modèle de régression linéaire** multipley = X b + u, exprimé dans un **espace d'observation**, avec $u \sim \mathscr{N}_N \{0, \Sigma)$, où Σ est connue, et où l'on suppose que l'hypothèse testée est de type « affine » $\Theta_0 = \{b \in \mathbf{R}^K : R\, b = r\}$ et que $\Theta_0 = \Theta_0{}^c$, où $R \in M_{JK}(\mathbf{R})$ est une **matrice** de **rang** $J < K$ et $r \in \mathbf{R}^J$ un vecteur, tous deux supposés connus (donnés).

Le rapport des Log-vraisemblances s'écrit (cf aussi **rapport des vraisemblances**) :

(12) $R_N = (R\, b^{\sim} - r)' \{R\, (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} R'\}^{-1} (R\, b^{\sim} - r)$,

où $b^{\sim} = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} R'\}^{-1} X' \Sigma^{-1} y$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance (non contraint) de b.

On remarque que R_N est égal à la **statistique de WALD** W_N (cf **test de WALD**) et à la **statistique des multiplicateurs de LAGRANGE** L_N .