TEST DU SCORE (I2, I4)
(10 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **test du score** est un test classique associé à la notion de **fonction score**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle statistique** de base, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation** et $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ un **échantillon**. On note $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ le **modèle image** du premier par X et l'on suppose que $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ est une **famille de lois dominée** par une **mesure positive** σ-finie μ (cf **mesure σ-finie**). On note alors :

(1) $\quad f(x, \theta) = dP_\theta^X(x) / d\mu(x), \qquad \forall (x, \theta) \in \mathcal{X} \times \Theta,$

la **vraisemblance** (ie la **dérivée de NIKODYM-RADON** de P_θ^X pr à μ).

La **Log-vraisemblance** $\mathcal{X} \times \Theta \mapsto \mathbf{R}$ est définie selon :

(2) $\quad L(x, \theta) = \ln f(x, \theta), \qquad (\mu\text{-p.p. pr à } x), \qquad \forall \theta \in \Theta.$

On suppose alors :

(a) que $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}^N, \mathcal{B}(\mathbf{R}^N))$ et $X = (X_1, ..., X_N)' \in \mathbf{R}^N$;

(b) que $\Theta = \mathbf{R}^Q$ et qu'il existe un couple (Q', Q'') d'entiers non nuls tels que Q' + Q'' = Q. On suppose, de plus, que le **paramètre** $\theta \in \Theta$ se décompose en un **paramètre principal** $\theta' = (\theta_1, ..., \theta_{Q'})'$ et un paramètre secondaire $\theta'' = (\theta_{Q'+1}, ..., \theta_Q)'$.

On note :

$S = (S_1, ..., S_Q)'$, $\quad$ avec $S = (1/N) . \partial L(X, \theta) / \partial \theta_q \ (\forall q = 1, ..., Q)$,

(3) $\quad H = (H_{qr})_{(q,r)}$, $\quad$ avec $H_{qr} = (1/N) . \partial^2 L(X, \theta) / (\partial \theta_q \ \ \partial \theta_r) \ (\forall q, r = 1, ..., Q)$,

$A = (A_{qr})_{(q,r)}$, $\quad$ avec $a_{qr} = E\, H_{qr} \ (\forall q, r = 1, ..., Q)$.

avec :

$S = (1/N) . (\partial L(X, \theta) / \partial \theta_q) \qquad (\forall q = 1, ..., Q)$,

(4) $\quad H_{qr} = (1/N) . (\partial^2 L(X, \theta) / (\partial \theta_q . \partial \theta_r)) \qquad (\forall q, r = 1, ..., Q)$,

$a_{qr} = E\, H_{qr} \quad (\forall q, r = 1, ..., Q)$.

Le **test du « score »**, ou **test des scores**, est le test de l'**hypothèse de base** :

(5) $H_0 : \theta' = \theta_0'$ (où $\theta_0' \in \mathbf{R}^{Q'}$ est donné),

contre une **hypothèse alternative** tq l'alternative générale :

(6) $H_1 : \theta' \neq \theta_0'$.

Ce test est fondé sur la **statistique** suivante, appelée **statistique du « score »** :

(7) $Q_N = (S^{\sim})' (A^{\sim})^{-1} S$,

dans laquelle, S et A étant partitionnées comme θ selon :

(8) $S = (S_1 ,..., S_{Q'} , S_{Q'+1} ,..., S_Q)$, $A = \{(A_{11} , A_{12}) /// (A_{21} , A_{22})\}$,

on note $S^{\sim}$ et $A^{\sim}$ les valeurs de S et A calculées au point :

(9) $\theta^{\sim} = (\theta_0', (\theta_N'')^{\sim})$,

où θ_N'' est l'**estimateur du maximum de vraisemblance** de θ'' sous l'hypothèse H_0 (ie l'estimateur du maximum de vraisemblance contraint par $\theta' = \theta_0'$). La notation /// désigne un saut de ligne (superposition des deux premiers blocs sur les deux seconds).

(ii) Si X est un **échantillon indépendant**, et sous des hypothèses de régularité classiques relativement à L, on établit la **convergence en loi** de la **forme quadratique** aléatoire Q_N précédente, ie :

(10) $Q_N \to^{\mathscr{L}}_{N \to +\infty} \mathscr{X}_{Q'}^2$ (**loi du chi-deux** à Q' **degrés de liberté**).

Cette propriété permet de définir des **régions critiques** asymptotiques associées au test de l'hypothèse H_0 , pour un seuil critique $\alpha \in]0, 1[$ donné.