

TEST SANS BIAIS (I2)

(19 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On considère un **problème de test** fondé sur une **structure statistique** fondamentale $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ et un **espace d'observation** $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Soit $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **variable aléatoire** (ou un **échantillon**) et $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}\}$ le **modèle image** obtenu.

On définit une **hypothèse de base** $H_b : \theta \in \Theta_b$, où $\Theta_b \subset \Theta$ est non vide, et une **alternative** $H_a : \theta \in \Theta_a$, où $\Theta_a \subset \Theta$ est non vide et tq $\Theta_a \cap \Theta_b = \emptyset$ (cf schéma). L'hypothèse de base est souvent désignée par l'indice 0 au lieu de b (« hypothèse « nulle » H_0 avec Θ_0 au lieu de Θ_b), et son alternative est souvent désignée par l'indice 1 au lieu de a (d'où H_1 au lieu de H_a , et Θ_1 au lieu de Θ_a).

		états de la Nature	
		H_b	H_a
décisions du statisticien	d_0	$1 - \alpha$	β
	d_1	α	$1 - \beta = \eta$
		1	1

α = risque de première espèce

β = risque de seconde espèce

η = puissance

Etant donné un nombre $\alpha \in]0, 1[$, on dit qu'un **test pur** $\varphi : \mathcal{X} \mapsto [0, 1]$ est un **test sans biais**, ou parfois un **test sans distorsion**, de **niveau** α , ou au **seuil** α , ssi :

(a) φ est de niveau au plus égal à (ie majoré par) α sur Θ_0 , ce qui s'écrit :

$$(1) \quad E_\theta \varphi(X) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0 ;$$

(b) φ est de **puissance** au moins égale à (ie minorée par) α sur Θ_a , ce qui s'écrit :

$$(2) \quad E_\theta \varphi(X) \geq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_a .$$

Autrement dit, parmi les tests de niveau inférieur à α , le test φ est tq la **probabilité** de rejeter H_0 alors que H_a est vraie est supérieure à celle de rejeter H_0 alors que H_0 elle-même est vraie.

La condition (1) s'écrit aussi :

$$(1)' \quad \alpha_0 = \sup_{\theta \in \Theta} \alpha_\theta(\varphi) \leq \alpha,$$

et la condition (2) s'écrit aussi :

$$(2)' \quad \alpha_0 = \inf_{\theta \in \Theta_a} \eta_{\theta}(\varphi) = \inf_{\theta \in \Theta_a} (1 - \beta_{\theta}(\varphi)) \geq \alpha,$$

où l'on note, par commodité, Θ_0 et Θ_a les ensembles Θ_0 et Θ_a .

On note souvent $E_0 \varphi(X)$ pour représenter $E_{\theta} \varphi(X)$ lorsque θ parcourt Θ_0 et $E_a \varphi(X)$ pour représenter $E_{\theta} \varphi(X)$ lorsque θ parcourt Θ_a .

Enfin, les deux conditions précédentes se résument, de façon symétrique, dans la condition :

$$(3) \quad \sup_{\Theta_0} E_0 \varphi(X) \leq \alpha, \quad \text{et} \quad \inf_{\Theta_a} E_a \varphi(X) \geq \alpha.$$

Un test sans biais possède ainsi une propriété de « bon sens » et il est souvent utilisés.

Cette notion est à rapprocher de celle de **région de confiance sans biais**.

(ii) A titre d'exemple, le test « trivial » φ défini par :

$$(4) \quad \varphi(x) = \alpha \quad (\text{P}_{\theta}\text{-p.s., } \forall \theta \in \Theta) \text{ (test « constant »)}$$

est un test sans biais.

(iii) A contrario, un test φ est un **test biaisé** ssi la probabilité de rejeter H_0 lorsque H_a est vraie est inférieure à la probabilité de rejeter H_0 lorsque H_0 est vraie.