

TEST SÉQUENTIEL (G7, I9)

(19 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **problème de test séquentiel** est un exemple-type de problème de la **théorie de la décision** statistique séquentielle (cf **analyse séquentielle**, **problème de décision séquentielle**).

Le **test de WALD** est le plus représentatif de la démarche statistique séquentielle.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle statistique** de base, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation** et $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de **va** $X_n : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), non nécessairement indépendante ou équadistribuée (**processus stochastique** quelconque). Soit $\Pi_\Theta = \{\Theta_0, \Theta_1\}$ une **partition** de l'ensemble Θ des valeurs possibles du **paramètre** θ .

On veut tester l'**hypothèse de base** :

$$(1) \quad H_0 : \theta \in \Theta_0$$

contre l'**hypothèse alternative** :

$$(2) \quad H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

Soit alors $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ la **famille des lois** associées à toute projection finie $X(N) = \text{pr}_{1\dots N} X = (X_1, \dots, X_N)$ de X . Par définition, $P_\theta^X = X(P_\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$. On suppose que, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, il existe une **mesure positive** σ -finie μ_N tq la famille $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ précédente soit une **famille de lois dominée** uniformément par μ_N , ie : $P_\theta^X \ll \mu_N$, $\forall \theta \in \Theta$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$. On note alors $L(x, \theta)$ ou $f(x, \theta)$ la **dérivée de NIKODYM-RADON** (ou **fonction de vraisemblance**) correspondante, avec $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Le **rapport des vraisemblances** $\lambda_N = L(x, \theta_1) / L(x, \theta_0)$, associé à tout couple $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$, définit alors une **statistique de test** :

$$(3) \quad \Lambda_N = \lambda_N(X) = L(X, \theta_1) / L(X, \theta_0),$$

appelée **statistique du rapport des vraisemblances**, ou **statistique de A. WALD**, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$.

Cette statistique permet de définir le **test séquentiel de A. WALD**, ou **test séquentiel du rapport des vraisemblances**, parfois appelé **test séquentiel du rapport des probabilités**, comme suit.

Etant donné deux nombres $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tq :

$$(4) \quad 0 < A \leq 1 \leq B < +\infty,$$

ainsi que l'échantillon $X(N)$ (donc l'indice N) précédent, trois cas peuvent se produire (**problème de décision multiple séquentiel(le)**) :

(a) si $\Lambda_N \leq A$, on accepte l'hypothèse H_0 et l'on arrête l'**échantillonnage** (ie le **processus**) ;

(b) si $\Lambda_N \geq B$, on accepte l'hypothèse H_1 , et l'on arrête l'échantillonnage (ou le processus) ;

(c) si $\Lambda_N \in]A, B[$ et $A < B$, on continue l'échantillonnage (ou le processus) en lui ajoutant une $(N+1)$ -ième observation X_{N+1} .

On appelle alors :

(a) **risque de première espèce** associé au test de WALD la probabilité $\alpha(\theta)$ de rejeter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est vraie. Si l'on définit une **région critique** dans $\mathcal{X}^N$ selon :

$$(5) \quad w_N = \{x = (x_1, \dots, x_N) : \Lambda_n \in]A, B[, \forall n = 1, \dots, N-1, \text{ et } \Lambda_N \geq B\},$$

le risque de première espèce s'écrit, par définition :

$$(6) \quad \alpha(\theta) = \sum_{N \in \mathbf{N}^*} \int \mathbf{1}(w_N) L(x, \theta) d\mu_N(x), \quad \forall \theta \in \Theta_0,$$

où $\mathbf{1}(A) = \mathbf{1}_A$ désigne la **fonction indicatrice** d'une **partie** A et où $d\mu_N(x)$ désigne $d\mu_N(x_1, \dots, x_N)$;

(b) **risque de seconde espèce** associé au test de WALD la probabilité $\beta(\theta)$ de rejeter l'hypothèse H_1 alors qu'elle est vraie. Parallèlement à ce qui précède, on obtient :

$$(7) \quad \beta(\theta) = \sum_{N \in \mathbf{N}^*} \int \mathbf{1}(w_N^c) L(x, \theta) d\mu_N(x), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

où A^c désigne la **complémentaire** de A .

(ii) On établit les propriétés suivantes :

(a) si le test séquentiel de WALD se termine P_{θ} -p.s. (pour tout $\theta \in \Theta$), alors :

$$(8) \quad \begin{aligned} A &\geq \beta(\theta) / \{1 - \alpha(\theta)\}, \\ B &\leq \{1 - \beta(\theta)\} / \alpha(\theta); \end{aligned}$$

(b) si $\theta \in \Theta_0$ (resp $\theta \in \Theta_1$), le test de WALD se termine P -p.s., ie :

$$(9) \quad P_{\theta}^X(N^{\sim} < +\infty) = 1, \quad \forall \theta \in \Theta_0 \text{ (resp } \theta \in \Theta_1),$$

expression dans laquelle N^* est la **variable aléatoire** (entière) définie comme la taille d'**échantillonnage** nécessaire pour accepter l'une des hypothèses H_0 ou H_1 , ie la taille tq l'échantillonnage (ou le processus) est arrêté lorsque $N^* = N$ (cf aussi **règle d'arrêt**, **temps d'arrêt**, **théorème d'arrêt**).

On dit que N est une **variable d'arrêt**, ou encore une **observation terminale**. Lorsque l'opération **espérance mathématique** a un sens, la **partie entière** de $E_\theta N^*$ est appelée **taille moyenne** d'échantillon.

Si l'on sature à l'égalité les inégalités (8), on définit les **approximations de A. WALD** des risques $\alpha(\theta)$ et $\beta(\theta)$.

(iii) Diverses variantes ou extensions du test de WALD ont été définies. Ainsi :

(a) on peut étendre le test par « **randomisation** » aux bornes A et B. La règle d'arrêt ϕ correspondante est alors tq, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$:

$$(10) \quad \phi_N(X(N)) = \begin{cases} 0 & \text{ssi } \Lambda_N \in]A, B[, \\ \gamma_N(X(N)) & \text{ssi } \Lambda_N \in \{A, B\}, \\ 1 & \text{ssi } \Lambda_N < A \text{ ou } \Lambda_N > B, \end{cases}$$

expression dans laquelle $\gamma_N(X(N))$ définit une fonction mesurable (ou variable aléatoire) γ_N à valeurs dans $]0, 1[$.

La **règle de décision terminale** δ (probabilité d'accepter H_1) est donc tq, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ (cf aussi **décision terminale**, **règle finale**) :

$$(11) \quad \delta_N(X(N)) = \begin{cases} 1 & \text{ssi } A < B < \Lambda_N, \\ \gamma_N'(X(N)) & \text{ssi } \Lambda_N \in \{A, B\}, \\ 0 & \text{ssi } \Lambda_N < A < B, \\ \gamma_N''(X(N)) & \text{ssi } A = B, \end{cases}$$

où γ_N' et γ_N'' sont des **va** quelconques à valeurs dans $]0, 1[$.

(b) une autre extension, appelée **test de A. WALD généralisé**, consiste à étudier le cas où les bornes (fixées a priori) A et B sont remplacées par des bornes (variables en fonction de N, mais toujours fixées à priori) A_N et B_N (pour tout $N \in \mathbf{N}^*$).

(iv) Lorsqu'on teste H_0 contre H_1 , la **fonction puissance**, définie de façon usuelle comme $\eta(\theta) = P_\theta^X(w)$, $\forall \theta \in \Theta_1$ (probabilité de rejeter H_0 alors que H_1 est vraie) permet de définir la **caractéristique de fonctionnement** (du test) $K : \Theta_1 \mapsto [0, 1]$ comme la fonction :

$$(12) \quad K(\theta) = 1 - \eta(\theta) = P_{\theta}^X(w^c), \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

(cf aussi **risque de seconde espèce**).

Le graphe de K est alors appelé **courbe de caractéristique de fonctionnement**, ou simplement **courbe de fonctionnement**, du test.

(iv) Les applications courantes du test concernent la **fiabilité** des **systèmes** ou le contrôle statistique de la qualité (cf **contrôle de réception**).