THÉORÈME D'ARRÊT (N2)
(21 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **propriété de martingale**, ou **propriété de martingalité**, est encore valable pour les **temps d'arrêt** d'une **martingale**.

Cette propriété importante, précisée ci-après, est connue sous le nom de **théorème de DOOB**.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (E, \mathcal{A}), (X_t)_{t \in T}\}$ une martingale, avec $T \subset \mathbf{N}$. Soit $\mathcal{F}_\tau$ la sous-**tribu** de $\mathcal{T}$ associée à un temps d'arrêt τ, ie la **famille** des **événements** $A \in \mathcal{T}$ tq $A \cap [\tau = t]$ est $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable, pour tout $t \in T$.

Alors , si τ' et τ'' sont deux temps d'arrêt bornés tq $\tau' \leq \tau''$, on a :

(1) $\quad E\,(X_{\tau'} / \mathcal{F}_{\tau''}) \;=\; X_{\tau'}$, $\qquad$ P-p.s. , pour tout $(\tau', \tau'') \in T^2_{\leq}$,

où $E\,(. / \mathcal{G})$ désigne l'**espérance conditionnelle** pr à une tribu $\mathcal{G}$.

(ii) Le théorème possède des analogues :

(a) pour des sous- (resp sur)-martingales ;

(b) pour des processus en **temps** continu $T \in \mathcal{I}(\mathbf{R}_+)$ (intervalles de $\mathbf{R}_+$) ;

(c) pour des temps d'arrêt non bornés.