THÉORÈME D'IMPOSSIBILITÉ DES SYSTÈMES (A14, D1, E)
(14 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème d'impossibilité des systèmes** signifie qu'au cours de l'**expérience aléatoire** consistant à observer une **suite** X donnée, le choix d'une suite extraite de façon aléatoire dans X n'influe en rien sur le **phénomène** qui engendre X, ie sur l'interprétation que l'on peut en faire. Ceci est vrai quelle que soit le mode d'extraction dans X.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** P^{ξ} et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite iid** selon P^{ξ}.

Dans ce contexte, on appelle **système** toute suite $\nu = (\nu_k)_{k \in \mathbf{N}}$ constituée de **variables aléatoires** entières $\nu_k : \Omega \mapsto \mathbf{N}$ et strictement croissante (ie $k < k+1 \Rightarrow \nu_k < \nu_{k+1}$, $\forall k \in \mathbf{N}$) qui vérifie la propriété suivante :

$$(1) \qquad [\nu_k = n_k] \in \sigma (X_0 , X_1 ,..., X_{n(k) - 1}),$$

pour tout $n_k \in \mathbf{N}$ et tout $k \in \mathbf{N}$, où $\sigma (X_0 , X_1 ,..., X_p)$ dénote, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la sous-**tribu** de $\mathcal{T}$ engendrée par la suite des va $\{X_0 , X_1 ,..., X_p\}$, et n(k) désigne, par commodité, l'indice n_k ($\forall k \in \mathbf{N}$).

On définit une **suite extraite** $Y = (Y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de X selon :

$$(2) \qquad Y_k = X_{\nu(k)} , \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

où $\nu(k)$ désigne l'indice ν_k ($\forall k \in \mathbf{N}$).

Le **théorème d'impossibilité des systèmes** affirme alors que Y est aussi une suite iid selon P^{ξ}, ie une **suite de même « nature »** que la suite initiale X.

(ii) L'interprétation, eg en termes de **théorie des jeux**, est la suivante : si un jeu se situe dans le cadre précédemment défini, il n'est pas possible de trouver des **instants** pour jouer (eg pour proposer une « mise ») qui soient plus « favorables » au **joueur** (que d'autres instants) (cf aussi **stratégie**).